أولاً الجبر

1 الأعداد الحقيقية

العــدد النســبى هــو أى عدد يمكن كتابته علــى الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a ، b عددان صحيحان، $b \neq 0$
ويرمــز لمجموعــة الأعــداد النســبية بالرمــز Q

6 نسبي — 4 نسبي

الأعداد غير النسبية

العدد غير النسبى هو عدد لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a , b عددان صحيحان، $b \neq 0$، ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز $Q^{`}$

$\sqrt{12}$ غير نسبي — $\sqrt{40}$ غير نسبي

أمثلة لأعداد غير نسبية :

- الجذر التربيعى لأى عدد ليس مربعًا كاملًا مثل : $\sqrt{2}$
- الجذر التكعيبى لأى عدد ليس مكعبًا كاملًا مثل : $\sqrt[3]{5}$
- العدد π حيث ... $\pi \approx 3.141592654$ ويساوى النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.
- النسبة الذهبية φ حيث : ... $\varphi \approx 1.618033989$ وهى نسبة مميزة ترتبط بجمال وتناسق التصميمات.

مثال

أى من الأعداد التالية عدد نسبى، وأيها عدد غير نسبى ؟

1	2	3	4	5	6	7	8
-12	$\sqrt{25}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt[3]{-27}$	$2\frac{2}{5}$	$-\sqrt[3]{10}$	0.125	$3.\overline{6}$

الحل

1	2	3	4	5	6	7	8
نسبي	نسبى	غير نسبى	نسبى	نسبى	غير نسبى	نسبى	نسبى

تدريب



أي من الأعداد التالية نسبي وأيها غير نسبي

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪
$\sqrt{8}$	17	$-\sqrt{4}$	$1\frac{1}{2}$	0.3	$0.\overline{2}$	$\sqrt[3]{25}$	25%	0	$\sqrt[3]{\lvert -64 \rvert}$	$\sqrt{5}+1$
......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......

إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبى

أى عدد غير نسبى يقع بين عددين نسبيين، ويمكن تمثيله على خط الأعداد بنقطة تقع بين هذين العددين.

مثال

أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من العددين الآتيين، وعيِّن موقعه التقريبى على خط الأعداد.

① $\sqrt{11}$

الحل

① اختر عددين صحيحين متتاليين كل منهما مربع كامل يقع بينهما العدد 11.

◄ العدد 11 يقع بين العددين 9 ، 16

$\because 9 < 11 < 16$ $\quad \therefore \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$ $\quad \therefore 3 < \sqrt{11} < 4$

$\therefore$ العدد $\sqrt{11}$ يقع بين العددين 3 و 4

وحيث إن العدد 11 أقرب إلى العدد 9 منه إلى العدد 16

فإن العدد $\sqrt{11}$ أقرب إلى العدد 3



② $\sqrt[3]{20}$

الحل

② اختر عددين صحيحين متتاليين كل منهما مكعب كامل يقع بينهما العدد 20.

◄ العدد 20 يقع بين العددين 8 ، 27

$\because 8 < 20 < 27$ $\quad \therefore \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27}$ $\quad \therefore 2 < \sqrt[3]{20} < 3$

$\therefore$ العدد $\sqrt[3]{20}$ يقع بين العددين 2 و 3

وحيث إن العدد 20 أقرب إلى العدد 27 منه إلى العدد 8

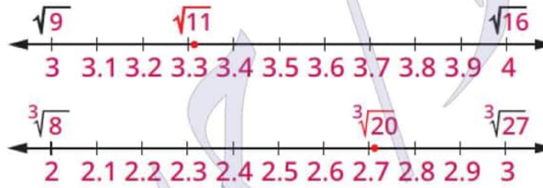
فإن العدد $\sqrt[3]{20}$ أقرب إلى العدد 3



الحل بإستخدام الآلة الحاسبة

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيم تقريبية أفضل لعدد غير نسبى، فمثلًا :

- $\sqrt{11} \approx 3.3$
- $\sqrt[3]{20} \approx 2.7$



تدريب

غرفة مربعة الشكل مساحة أرضيتها 15 م^2 ، يريد أحمد أن يحيط أرضيتها بشريط زخرفي ،

قدر طول هذا الشريط .

ملاحظة هامة

نسبة طول المستطيل الذهبي إلى عرضه تساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6$

ويمكن تقديرها 1.5 أي أن طوله يساوي مرة ونصف عرضه تقريبا .

$1+\sqrt{5}$



2

الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة التى تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية، ويُرمز لها بالرمز R

أى أن $R = Q \cup Q`$ حيث $Q \cap Q` = \varnothing$

شكل ڤن المقابل يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد، حيث :

$N \subset Z \subset Q \subset R$

$Q` \subset R$

مجموعة الأعداد الحقيقية R

مجموعة الأعداد النسبية Q



مجموعة الأعداد غير النسبية $Q`$

■ **معلومة سابقة**

لا يوجد جذر تربيعى لعدد نسبى سالب.

مثال

ضع فى المربع الخالى رمزًا مناسبًا من الرمزين $\in$ أو $\notin$:

(1) $0.\overline{63}$ ⬜ $Q`$ (2) $\sqrt{5}$ ⬜ R (3) $|-4|$ ⬜ N

(4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ ⬜ Z (5) $\sqrt[3]{3}$ ⬜ Q (6) $\sqrt{-1}$ ⬜ R

الحل

(1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\in$

(4) $\notin$ (5) $\notin$ (6) $\notin$

تدريب

أكتب جميع المجموعات الممكنة من مجموعة الأعداد $(N \text{ ، } Z \text{ ، } Q \text{ ، } Q` \text{ ، } R)$ التي ينتمي إليها كلا من الأعداد التالية

(1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{100}$ (3) $0.\overline{25}$ (4) $-\sqrt[3]{8}$ (5) $\sqrt[3]{9}$

حل المعادلات

مثال

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

(1) $3x^2 - 7 = 8$ حيث $x \in Q`$

(2) $4x^3 + 15 = -17$ حيث $x \in Q`$

الحل

(1)

$\because 3x^2 - 7 = 8$

$\therefore 3x^2 = 8 + 7 = 15$

$\therefore x^2 = \frac{15}{3} = 5$

$\therefore x = \pm\sqrt{5} \in Q`$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\sqrt{5} , -\sqrt{5}\}$

(2)

$\because 4x^3 + 15 = -17$

$\therefore 4x^3 = -17 - 15 = -32$

$\therefore x^3 = \frac{-32}{4} = -8$

$\therefore x = \sqrt[3]{-8} = -2 \notin Q`$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \varnothing$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + 1 = -4$ حيث $x \in R$

(4) $5x^3 - \frac{1}{4} = 4x^3 + 8\frac{3}{4}$ حيث $x \in R$

الحل

(3)

$\because \frac{1}{2}x^2 + 1 = -4$

$\therefore \frac{1}{2}x^2 = -4 - 1 = -5$

$\therefore x^2 = -5 \times 2 = -10$

$\therefore x = \pm\sqrt{-10} \notin R$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \varnothing$

(4)

$\because 5x^3 - \frac{1}{4} = 4x^3 + 8\frac{3}{4}$

$\therefore 5x^3 - 4x^3 = 8\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$\therefore x^3 = 9$

$\therefore x = \sqrt[3]{9} \in R$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\sqrt[3]{9}\}$

تدريب

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية إذا كانت مجموعة التعويض هي :

أولًا : Q' ثانيًا : R

❶ $\frac{1}{3}x^3 + 9 = 0$	❷ $\frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{2}$	❸ $2(x^2 - 1) = -10$

الواجب

① صنف كلا من الأعداد التالية إلى (نسبي وغير نسبي):

$\sqrt{6}$	$\frac{12}{31}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$1.\overline{6}$	$-\sqrt[3]{64}$	0.323232...
0	$-\sqrt{121}$	$\sqrt[3]{-27}$	$2\frac{2}{3}$	17%	$\sqrt[3]{16}$

----

② أوجد عددين صحيحين يقع بينهما كل عدد من الأعداد التالية ، ثم عين موقع تقريبي لع على خط الأعداد:

①	$\sqrt{5}$	②	$\sqrt{13}$	③	$-\sqrt{11}$	④	$\sqrt[3]{14}$

----

③ ضع في كل مربع أحد الرموز (> أو < أو =) لتحصل على عبارة صحيحة:

①	$14 \square \sqrt{96}$	②	$-2.6 \square -\sqrt{7}$ ③ $\sqrt{9} \square \sqrt[3]{25}$

----

④ رتب كلا من الأعداد $3.\overline{36}$ ، $6\frac{4}{5}$ ، 7 ، $\sqrt{40}$ من الأصغر إلى الأكبر .

----

⑤ أوجد في R مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

①	$x^3 - 11 = 5$	②	$2x^3 + 13 = 67$	③	$\frac{2}{3}x^2 = \frac{4}{15}$	④	$3x^2 - 1 = -13$

⑥ أوجد في $\acute{Q}$ مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

①	$2x^2 - 3 = 9$	②	$6x^2 - 3 = 4x^2 + 7$	③	$2(x^3 + 1) = 18$

---

⑦ مربع مساحته 29 سم^2، إلى أي مجموعات الأعداد الآتية ينتمى طول ضلعه ؟ حدد كل المجموعات الممكنة

☐ R ☐ Q ☐ Q\` ☐ Z ☐ N

---

⑧ أيهما أكبر : طول ضلع مربع مساحته 16 سم^2 أم طول قطر مربع مساحته 9 سم^2

---

⑨ اختر الإجابة الصحيحة لكلا مما يأتي :

① أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى ؟ (أ) $0.\overline{3}$ (ب) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ (جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt[3]{-125}$

② إذا كان : $x \in Z$ ، $x < \sqrt{29} < x + 1$ فما قيمة x ؟ (أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

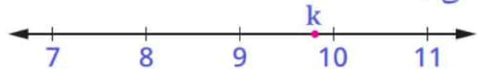
③ ما تقدير العدد $\sqrt{41}$ لأقرب عدد صحيح ؟ (أ) 6 (ب) 7 (جـ) 36 (د) 49

④ ما تقدير العدد $\sqrt[3]{25}$ لأقرب عدد صحيح ؟ (أ) 2 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 12.5

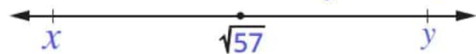
⑤ أى من الأعداد التالية عدد غير نسبى يقع بين 3 ، 2 ؟ (أ) $2.\overline{5}$ (ب) $2\frac{1}{3}$ (جـ) $\sqrt{6.25}$ (د) $\sqrt[3]{9}$

⑥ إذا كان : $1 < \sqrt{n} < 2$ فأى مما يلى قيمة محتملة للعدد n ؟ (أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 8

⑦ أى من الأعداد التالية تمثله النقطة k على خط الأعداد التالى ؟ (أ) $\sqrt{86}$ (ب) $\sqrt{96}$ (جـ) $\sqrt{81}$ (د) $\sqrt{78}$



⑧ إذا كان x، y عددين صحيحين متتاليين، فما قيمة $x + y$ ؟ (أ) 11 (ب) 13 (جـ) 15 (د) 17



---

⑩ إذا كان $10 < \sqrt{x} < 11$ ، $12 < \sqrt{y} < 13$ حيث x، y عددان صحيحان موجبان

فأوجد أكبر قيمة للمقدار $y - x$

2 الفترات والعمليات عليها

أولاً الفترات المحدودة

إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$ ، فإن :

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a وأصغر من أو تساوى b

$\{x : x \in R , a \le x \le b\} = [a , b]$



$[a , b]$ فترة مغلقة.

$b \in [a , b]$ ، $a \in [a , b]$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأصغر من b

$\{x : x \in R , a < x < b\} =]a , b[$



$]a , b[$ فترة مفتوحة.

$b \notin]a , b[$ ، $a \notin]a , b[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a وأصغر من b

$\{x : x \in R , a \le x < b\} = [a , b[$



$[a , b[$ فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة

$b \notin [a , b[$ ، $a \in [a , b[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a وأصغر من أو تساوى b

$\{x : x \in R , a < x \le b\} =]a , b]$



$]a , b]$ فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة

$b \in]a , b]$ ، $a \notin]a , b]$

مثال

1 اكتب على صورة فترة، ثم مثِّل على خط الأعداد المجموعة A :

$A = \{x : x \in R , 1 < x \le 3\}$

هل $\sqrt{2} \in A$ ؟

2 اكتب على صورة فترة، ثم مثِّل على خط الأعداد المجموعة B :

$B = \{x : x \in R , -2 < x < 2\}$

هل $\sqrt[3]{-9} \in B$ ؟

الحل

1 $A =]1 , 3]$



باستخدام الآلة الحاسبة : $\sqrt{2} \approx 1.4$

$\therefore \sqrt{2} \in]1 , 3]$ $\quad \therefore 1 < \sqrt{2} \le 3$

1 $A =]1 , 3]$



باستخدام الآلة الحاسبة : $\sqrt{2} \approx 1.4$

$\therefore \sqrt{2} \in]1 , 3]$ $\quad \therefore 1 < \sqrt{2} \le 3$

تدريب

اكتب على صورة فترة، ثم مثِّل على خط الأعداد كلًّا من المجموعتين الآتيتين

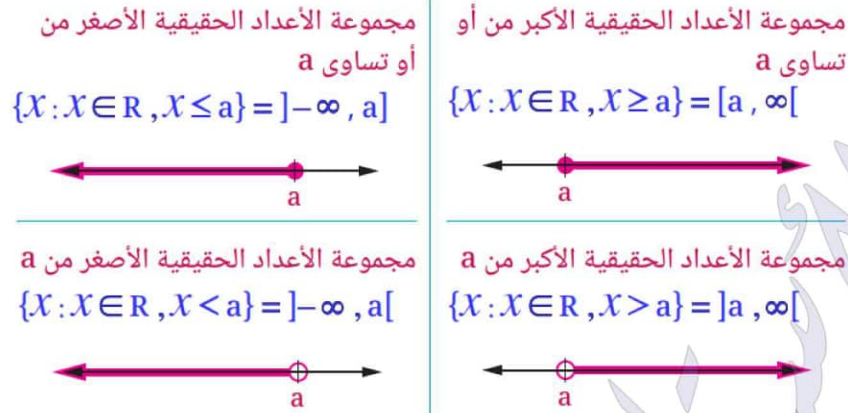
1 $\{x : x \in R , -1 < x < 5\}$

2 $\{x : x \in R , 0.5 \le x < \sqrt{9}\}$

ثانيا الفترات غير المحدودة

• تمتد مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد فى الاتجاه الموجب إلى ما لا نهاية (∞) وتمتد فى الاتجاه السالب إلى ما لا نهاية $(-\infty)$

• يُستخدم الرمزان ∞ و $-\infty$ فى التعبير عن المجموعات غير المحدودة كما يلى :
إذا كان $a \in R$ فإن :



مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى a
$\{x : x \in R , x \geq a\} = [a , \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوى a
$\{x : x \in R , x \leq a\} =]-\infty , a]$

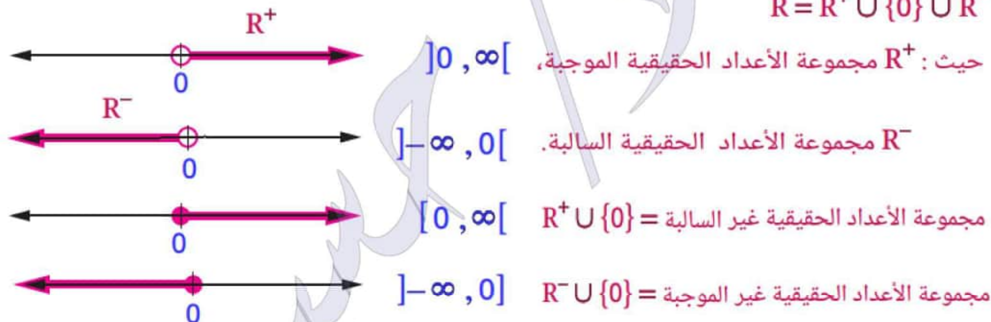
مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a
$\{x : x \in R , x > a\} =]a , \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من a
$\{x : x \in R , x < a\} =]-\infty , a[$

ملاحظات هامة

الفترة $]-\infty , \infty[$ تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية R ، $\infty \notin R$ و $-\infty \notin R$

$R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$



حيث : R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. $]0 , \infty[$

R^- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة. $]-\infty , 0[$

مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $= R^+ \cup \{0\}$ $[0 , \infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $= R^- \cup \{0\}$ $]-\infty , 0]$

تدريب

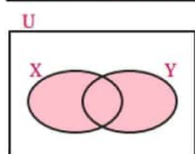
أكتب على صورة فترة كل من المجموعات التالية ومثلها على خط الأعداد

$\{x : x \in R , x \geq -2\}$
....
....

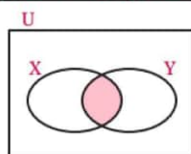
$\{x : x \in R , x < 1\}$
....
....

العمليات على الفترات

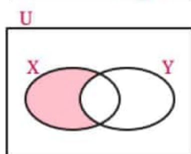
الاتحاد $(X \cup Y)$:



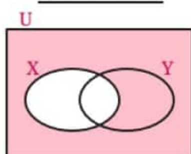
التقاطع $(X \cap Y)$:



الفرق $(X - Y)$:



المكملة $X^\backprime$:



المجموعة الشاملة هي مجموعة تحتوي على كل المجموعات الجزئية ويرمز لها بالرمز U

مثال

	المجموعات	الفترات
	بفرض أن : $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ حيث U المجموعة الشاملة $X=\{2,3,4,5\}$ $Y=\{1,2,3\}$	بفرض أن : $U=R$ حيث U المجموعة الشاملة $X=[-1,3]$ $Y=[1,4]$
الاتحاد $(X \cup Y)$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X أو Y	$X \cup Y=\{1,2,3,4,5\}$	$X \cup Y=[-1,4]$
التقاطع $(X \cap Y)$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X و Y	$X \cap Y=\{2,3\}$	$X \cap Y=[1,3]$
الفرق $(X - Y)$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى X ولا تنتمى إلى Y	$X-Y=\{4,5\}$	$X-Y=[-1,1[$
المكملة $X`$: مجموعة العناصر التى تنتمى إلى U ولا تنتمى إلى X	$X`=U-X=\{1,6\}$	$X`=R-X$ $=]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$

مثال

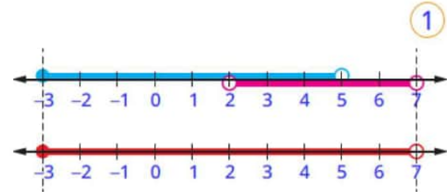
أوجد مستعيناً بخط الأعداد :

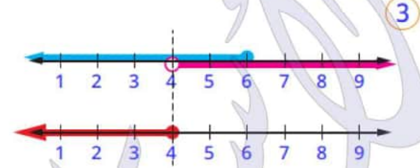
1. $[-3,5[\cup]2,7[$

2. $]1,5] \cap]-\infty,3]$

الحل

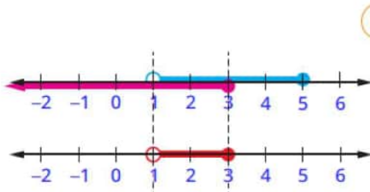
1

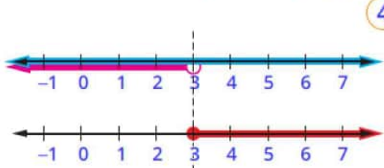




$[-3,5[\cup]2,7[= [-3,7[$

2





$]1,5] \cap]-\infty,3] =]1,3]$

3. $]-\infty,6] -]4,\infty[$

4. $]-\infty,3[`$

الحل

3





$]-\infty,6] -]4,\infty[=]-\infty,4]$

4





$]-\infty,3[` = R -]-\infty,3[= [3,\infty[$

تدريب

أوجد مستعيناً بخط الأعداد :

$[4,9] \cap [7,10[$

....

....

....

....

....

....

$]-3,2[\cup]0,\infty[$

....

....

....

....

....

....

$]0,5[-]3,7]$

....

....

....

....

....

....

$X`$ حيث $X = [-5,\infty[$

....

....

....

....

....

....



الواجب

① إذا كانت $X =]-2\,,2[$ ، $Y = [1\,,4]$ أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

$X \cap Y \quad , \quad X \cup Y \quad , \quad Y - X \quad , \quad X - Y$

---

② إذا كانت $A =]-5\,,\infty[$ ، $B =]-\infty\,,2]$ أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

$A` \quad , \quad B - A \quad , \quad A - B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A \cup B$

---

③ إذا كانت $A = [-1\,,3]$ ، $B =]-\infty\,,3[$ فأوجد ما يأتى :

$B` \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A \cup B \quad , \quad B - A \quad , \quad A - B$

---

④ أوجد كل مما يأتي :

① $[2\,,5[\cup]-2\,,3]$

② $[2\,,7] - [3\,,8[$

③ $]-1\,,3[\cap]-5\,,1]$

④ $[4\,,8[`$

⑤ $[3\,,\infty[\cap]-\infty\,,7[$

⑥ $]2\,,5] \cup]5\,,\infty[$

⑦ $R \cap [2\,,5[$

⑧ $R^{+} \cup]0\,,2]$

⑨ $R^{-} - [-2\,,0[$

⑩ $R^{-} \cup R^{+}$

⑪ $N \cap [-3\,,0[$

⑫ $Z^{+} \cap]-1\,,2[$

⑬ $Z^{-} \cap]-2\,,3]$

⑭ $\{3\,,5\} \cup]3\,,5[$

⑮ $\{3\,,7\} \cap [3\,,7[$

⑯ $[2\,,5] - \{2\,,5\}$

⑰ $[0\,,5] - \{5\}$

---

⑤ اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :

① إذا كانت $a \in]2,5[$ فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلى ؟ (أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 5

② إذا كانت $a \notin]-1,3]$ فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلى ؟ (أ) -1 (ب) 0 (جـ) 2 (د) 3

③ إذا كانت $a \notin]-1,3]$ فإن a يمكن أن تساوى أيًا مما يلى ؟ (أ) -1 (ب) 0 (جـ) 2 (د) 3

④ أى مما يلى يمثل $X \cap Y$ ؟

X: 3 — 5
Y: 5 — 7

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{5\}$ (جـ) $[3,7[$ (د) $[3,5[$

⑤ ما الفترة الناتجة عن $]2,5[\cup \{2\}$ ؟ (أ) $]2,5[$ (ب) $[2,5]$ (جـ) $]2,5]$ (د) $[2,5[$

⑥ أى الفترات الآتية ينتمى إليها العدد $-\sqrt{7}$ ؟ (أ) $[-2,-1]$ (ب) $[-3,-2]$ (جـ) $[-4,-3]$ (د) $[-7,-6]$

---

⑥ إذا كانت a , b , c , d أعدادًا حقيقية، $a < c < b < d$ ، فأوجد كلًا من :

$[a,b] \cap [c,d]$ ، $[a,b] - [c,d]$

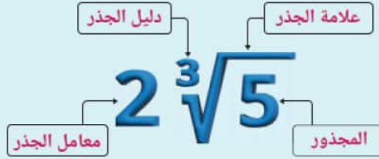
---

⑦ إذا كانت $[-2,a] \cap [b,7] = [2,4]$ فما قيمة $\frac{b^a}{a^b}$ ؟

3 العمليات على الأعداد الحقيقية

الحدود الجذرية المتشابهة

الحدود الجذرية المتشابهة هى حدود تحتوى على جذور لها نفس دليل الجذر ونفس المجذور (العدد أسفل الجذر)



أمثلة لحدود جذرية متشابهة :

$\{2\sqrt{3} \ ، \ 4\sqrt{3}\}$ ، $\{-3\sqrt[3]{5} \ ، \ \sqrt[3]{5}\}$

أمثلة لحدود جذرية غير متشابهة :

$\{3\sqrt{2} \ ، \ 2\sqrt{3}\}$ ، $\{2\sqrt[3]{5} \ ، \ 2\sqrt{5}\}$

الجمع والطرح

عند جمع وطرح الحدود الجذرية المتشابهة نستخدم نفس طريقة جمع وطرح الحدود الجبرية المتشابهة :

$$-4x + x = (-4+1)x = -3x$$

الضرب

عند ضرب الحدود الجذرية نستخدم نفس طريقة ضرب الحدود الجبرية :

$$-4x \times x = (-4 \times 1)x^2 = -4x^2$$

ملاحظة

إذا كانت $x \geq 0$ فإن : $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$

إذا كانت $x \in R$ فإن : $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

مثال

إذا كانت : $x = -4\sqrt{3}$ ، $y = \sqrt{3}$ ، $z = \sqrt[3]{5}$ فأوجد قيمة كل مما يأتى :

① $x + y$

الحل

$x + y = -4\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= (-4+1)\sqrt{3}$

$= -3\sqrt{3}$

② $x \times y$

الحل

$x \times y = -4\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= (-4 \times 1) \times (\sqrt{3})^2$

$= -4 \times 3 = -12$

③ $\frac{x}{2y}$

الحل

$\frac{x}{2y} = \frac{-4\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3}}$

$= \frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-4}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -2 \times 1 = -2$

④ $2x - z^3$

الحل

$2x - z^3 = 2 \times (-4\sqrt{3}) - (\sqrt[3]{5})^3$

$= -8\sqrt{3} - 5$



تدريب

أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$ ....

② $-5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ ....

③ $\frac{(\sqrt{7})^2 \times 3\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}$ ....



مثال

اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى أبسط صورة بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

① $\frac{7}{\sqrt{3}}$

② $\frac{-15}{\sqrt{5}}$

③ $\frac{12}{5\sqrt{2}}$

الحل

① بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

② بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{5}$

$$\therefore \frac{-15}{\sqrt{5}} = \frac{-15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-15\sqrt{5}}{5} = -3\sqrt{5}$$

③ بضرب كل من البسط والمقام فى $\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{12}{5\sqrt{2}} = \frac{12}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}\sqrt{2}}{5 \times \cancel{2}_1} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$



تدريب

اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى أبسط صورة بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

① $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ....

② $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ ....

③ $\frac{9}{5\sqrt{3}}$ ....

خواص العمليات على الأعداد الحقيقية

إذا كانت : a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية، فإن :

الخاصية	عملية الجمع	عملية الضرب
الانغلاق	$a + b \in R$	$a \times b \in R$
الإبدال	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
الدمج (التجميع)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
توزيع الضرب على الجمع	$a(b + c) = ab + ac$	
المحايد	المحايد الجمعى هو 0 $a + 0 = 0 + a = a$	المحايد الضربى هو 1 $a \times 1 = 1 \times a = a$
المعكوس	المعكوس الجمعى للعدد a هو $(-a)$ حيث : $a + (-a) = 0$	المعكوس الضربى للعدد a هو $\frac{1}{a}$ (حيث $a \neq 0$) حيث : $a \times \frac{1}{a} = 1$

تذكر

• $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ • $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ • $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

الأخيرين — الأولين

$(x+3)(x+2) = (x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$

الوسطين + الطرفين

مثال

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

1) $2\sqrt{3}(4+\sqrt{3}) - 4\sqrt{3}$ 2) $(\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+3)$

الحل

$2\sqrt{3}(4+\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times 4 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

$= 8\sqrt{3} + 2 \times 3 - 4\sqrt{3}$

$= 8\sqrt{3} + 6 - 4\sqrt{3}$

$= 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6 = 4\sqrt{3} + 6$

$(\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+3) = \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} + \sqrt{7} \times 3 - 1 \times 2\sqrt{7} - 1 \times 3$

$= 14 + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 3$

$= (14-3) + (3\sqrt{7} - 2\sqrt{7})$

$= 11 + \sqrt{7}$

3) $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$ 4) $(2\sqrt{5}-5)^2$

الحل

$(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$

$= (2\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 8 - 1 = 7$

$(2\sqrt{5}-5)^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2 \times 2\sqrt{5} \times (-5)) + (-5)^2$

$= 20 - 20\sqrt{5} + 25$

$= 45 - 20\sqrt{5}$

تدريب

إذا كانت $x = (\sqrt{5}-2)$ ، $y = (\sqrt{5}+2)$ فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار $x^2 - y^2$

....

ملاحظة

لوضع العدد $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ فى أبسط صورة يجب جعل مقامه عددًا صحيحًا بضرب البسط والمقام فى الجزء غير النسبى $\sqrt{2}$

لجعل العدد $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ فى أبسط صورة، اضرب كلًا من البسط والمقام فى $(2+\sqrt{3})$.

مثال أوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى، والمعكوس الضربى لكل من :

(1) $3\sqrt{2}$

المعكوس الجمعى $= -3\sqrt{2}$

المعكوس الضربى $= \frac{1}{3\sqrt{2}}$

$\because \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\therefore$ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $= \frac{\sqrt{2}}{6}$

(2) $2-\sqrt{3}$

الحل

المعكوس الجمعى $= -(2-\sqrt{3})$

$= -2+\sqrt{3}$

المعكوس الضربى $= \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

$\because \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$

$\therefore$ المعكوس الضربى فى أبسط صورة $= 2+\sqrt{3}$

تدريب أوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى، والمعكوس الضربى لكل من :

(1) $-4\sqrt{2}$ ....

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ....

(3) $3\sqrt{7}-4$ ....

مثال حوض زجاجى مغطى على شكل متوازى مستطيلات لعرض الأسماك، **أبعاده** $2\sqrt{2}$ م ، $\sqrt{2}$ م ، 2 م أوجد :

(1) حجم الحوض الزجاجى. (2) المساحة الكلية للحوض لأقرب $م^2$.

الحل

(1) $\because$ حجم الحوض (V) = الطول × العرض × الارتفاع

$\therefore V = 2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2}$

$= 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$

$\therefore$ حجم الحوض $= 8$ $م^3$.

(2) $\because$ المساحة الكلية (A) =

2 (الطول × العرض + الطول × الارتفاع + العرض × الارتفاع)

$\therefore A = 2(2\sqrt{2} \times 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2})$

$= 2(4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}) = 2(6\sqrt{2} + 4)$

$= 12\sqrt{2} + 8 \approx 24.97$

$\therefore$ مساحة الحوض الكلية ≈ 25 $م^2$.

تدريب

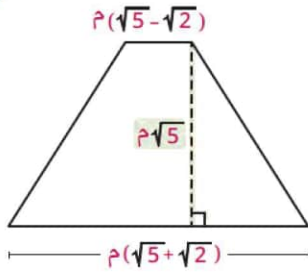
سجادة مستطيلة الشكل بُعداها $(\sqrt{5}+1)$ م، $(\sqrt{5}-1)$ م. وسجادة مربعة الشكل طول ضلعها $\sqrt{5}$ م.

أى من السجادتين أكبر فى المساحة ؟ وأيهما أكبر فى المحيط ؟



تدريب

فى الشكل حوض زهور قاعدته
على شكل شبه منحرف.
أوجد مساحة قاعدة الحوض.



....

....

....



الواجب

① أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

① $2\sqrt{7}-3\sqrt{3}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}$

② $2\sqrt{5}-3\sqrt[3]{2}+4\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$

③ $(\sqrt[3]{5})^3\times 2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{5}(2-\sqrt{5})-2(1+\sqrt{5})$

⑤ $(\sqrt{7}-1)^2+(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-3)$

⑥ $(3+2\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$

---

② اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا، واكتب العدد فى أبسط صورة :

① $\frac{1}{\sqrt{15}}$

② $\frac{30}{\sqrt{10}}$

③ $\frac{10}{2\sqrt{5}}$

④ $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$

⑤ $\frac{1}{2+\sqrt{6}}$

⑥ $\frac{20}{5-\sqrt{15}}$

⑦ $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

---

③ إذا كانت : $x=\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ ، $y=\sqrt{3}+2$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

① $(x+y)^2$

② $x\,y$

③ x^2+y^2

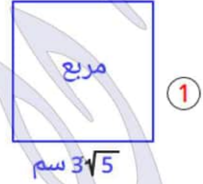
---

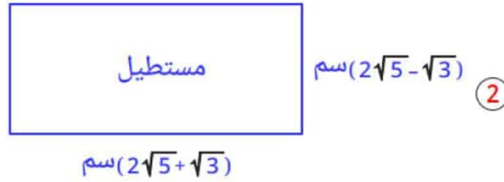
④ **أوجد كل مما يأتي :**

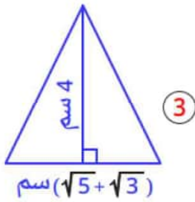
إذا كان : $\frac{y}{2\sqrt{3}} = \frac{x}{3\sqrt{2}} = 1$ ، فأوجد قيمة $x^2 + y^2$

---

⑤ أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة







---

⑥ **اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :**

① إذا كان : $a + \sqrt{5} = 0$ فما قيمة a ؟ (أ) 0 (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $-\sqrt{5}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

② إذا كان : $a \times \sqrt{2} = 1$ فما قيمة a ؟ (أ) 1 (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $-\sqrt{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ ما قيمة : $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ ؟ (أ) $\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{6}$ (د) 3

④ إذا كان : $a\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ فإن : (أ) $a = -1$ (ب) $a = 1$ (جـ) $a = 7$ (د) $a = 10$

⑤ إذا كان : $(2\sqrt{3})^n = 12$ فإن : (أ) $n = 2$ (ب) $n = 3$ (جـ) $n = 4$ (د) $n = 6$

⑥ إذا كان : $4\sqrt[3]{5} = 3a + \sqrt[3]{5}$ فإن : (أ) $a = 1$ (ب) $a = \sqrt{5}$ (جـ) $a = \sqrt[3]{5}$ (د) $a = 5$

⑦ ما المعكوس الجمعى للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ فى أبسط صورة ؟ (أ) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ب) 7 (جـ) $-\sqrt{7}$ (د) -7

⑧ ما المعكوس الضربى للعدد : $2 - \sqrt{3}$ ؟ (أ) $2 - \sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3} + 2$ (جـ) $-\sqrt{3} - 2$ (د) $\sqrt{3} - 2$

---

⑦ عند إنشاء مخزن على شكل متوازى مستطيلات، كانت أبعاده a , b , c متر.
فإذا كان $a\,c = 5$ ، $b\,c = 5\sqrt{3}$ ، $a\,b = 3\sqrt{3}$ ،
فأوجد حجم قاعة الاجتماعات.

4 قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية

$\sqrt{192}$ → $8\sqrt{3}$

$\sqrt{162}$ → $9\sqrt{2}$

ضرب وقسمة الجذور

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
إذا كان a , b عددين حقيقيين غير سالبين فإن :	إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن :
$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$	$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\times b}$
مثال : $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$	مثال : $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{-4}=\sqrt[3]{3\times(-4)}=\sqrt[3]{-12}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ بشرط $b\neq 0$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ بشرط $b\neq 0$
مثال : $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$	مثال : $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$
إذا كان a , b عددين حقيقيين غير سالبين :	إذا كان a , b عددين حقيقيين :
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$	$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\neq\sqrt[3]{a+b}$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$	$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\neq\sqrt[3]{a-b}$

مثال

ضع فى أبسط صورة كلًا من الأعداد التالية :

1) $\sqrt{32}$

الحل

$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

2) $\sqrt[3]{24}$

$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times 3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

3) $2\sqrt{\frac{5}{2}}$

الحل

$2\sqrt{\frac{5}{2}}=2\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=2\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=2\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$

4) $3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$

$=3\times\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$

$=3\times\frac{\sqrt[3]{-2\times 3\times 3}}{3}$

$=3\times\frac{\sqrt[3]{-18}}{3}=-\sqrt[3]{18}$

تدريب

ضع فى أبسط صورة كلًا من الأعداد التالية :

(1) $\sqrt{50}$ ....

(2) $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ ....

(3) $2\sqrt[3]{16}$ ....

(4) $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ ....

مثال

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

$2\sqrt{3}+5\sqrt{27}-\sqrt{48}$

$\frac{\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$

الحل

$2\sqrt{3}+5\sqrt{27}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+5\sqrt{9\times3}-\sqrt{16\times3}$

$=2\sqrt{3}+5\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}-\sqrt{16}\times\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}+5\times3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}+15\sqrt{3}-4\sqrt{3}=13\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{8\times5}-2\sqrt[3]{27\times5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\frac{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}-2\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\frac{2\sqrt[3]{5}-2\times3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\frac{2\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

$=\frac{-4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=-4$

تدريب

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

(1) $2\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

....
....

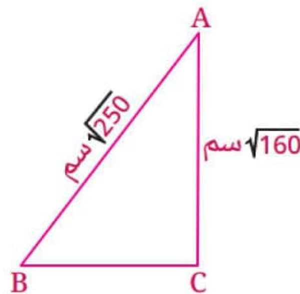
(2) $2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{128}$

....
....

مثال

ABC مثلث محيطه $\sqrt{1440}$ سم .

أوجد طول $\overline{BC}$



الحل

$\because$ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$\therefore \sqrt{250}+\sqrt{160}+BC=\sqrt{1440}$

$\therefore \sqrt{25\times10}+\sqrt{16\times10}+BC=\sqrt{144\times10}$

$\therefore 5\sqrt{10}+4\sqrt{10}+BC=12\sqrt{10}$

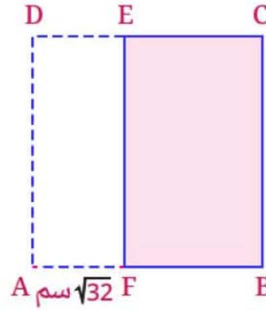
$\therefore 9\sqrt{10}+BC=12\sqrt{10}$

$\therefore BC=12\sqrt{10}-9\sqrt{10}=3\sqrt{10}$

أى أن طول $\overline{BC}$ يساوى $3\sqrt{10}$ سم.

تدريب

مساحة المربع ABCD تساوي 200 سم^2.
قُطع منه المستطيل AFED الذي عرضه $\sqrt{32}$ سم، فما مساحة الشكل FBCE ؟



مثال

إذا كانت : $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ ، $y = \frac{3}{x}$ ، فأوجد فى أبسط صورة : ① $x - y$ ② $\frac{y}{x}$

الحل

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

① $x - y = (\sqrt{5}+\sqrt{2}) - (\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

② $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{10}+2}{3}$

$$= \frac{7-2\sqrt{10}}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

تدريب

إذا كانت : $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ فأوجد فى أبسط صورة قيمة : $x + \frac{1}{x}$

الواجب

① اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

① $3\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{27}$

② $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{16}$

③ $\frac{2\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{10}}$

④ $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$

⑤ $\frac{3\sqrt[3]{32}-3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$

⑥ $3\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$

⑦ $4\sqrt{48}+\frac{4}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}$

⑧ $\sqrt[3]{192}-3\sqrt[3]{375}+2\sqrt[3]{24}$

⑨ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{256}+\frac{12}{\sqrt[3]{16}}+\sqrt[3]{32}$

---

② فى كل مما يأتى أوجد قيمة x :

① $x\sqrt{32}=2\sqrt{50}+\sqrt{72}$

② $x\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{270}$

---

③ ① إذا كان : $2\sqrt{24}=b\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{5}=2\sqrt{a}$ فأوجد $a+b$.

② إذا كانت : $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ فأوجد فى أبسط صورة كلًا مما يأتى :

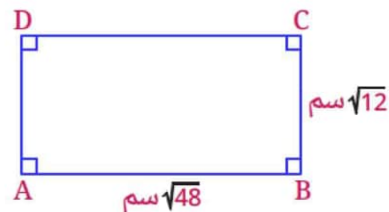
(1) $x\times y$ (2) $\frac{x}{y}$ (3) $(x-\frac{1}{x})^2$

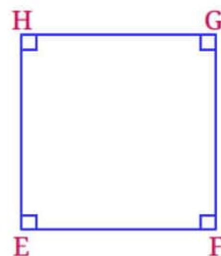
③ إذا كانت : $a=\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$ ، $b=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$ فأوجد فى أبسط صورة كلًا مما يأتى :

(1) $(a+b)^3$ (2) $a\times b$ (3) a^2-b^2

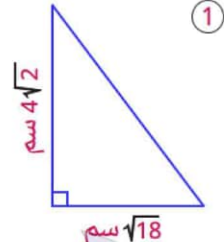
---

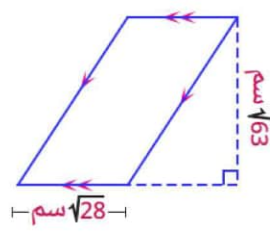
④ إذا كانت مساحة المستطيل ABCD تساوى مساحة المربع EFGH فما طول $\overline{EF}$ ؟

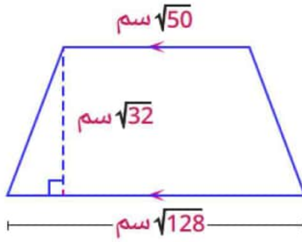




⑤ أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة

① 

② 

③ 

---

⑥ **اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :**

① أى مما يلى صحيح ؟ (أ) $\sqrt{40}=4\sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{32}=8\sqrt{2}$ (جـ) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{48}=3\sqrt{6}$

② ما قيمة : $\sqrt{32}+\sqrt{18}$ ؟ (أ) $\sqrt{50}$ (ب) $7\sqrt{2}$ (جـ) $7\sqrt{4}$ (د) $5\sqrt{4}$

③ أى مما يلى يكافئ $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{5}$ ؟ (أ) $\sqrt[3]{30}$ (ب) 5 (جـ) $5\sqrt[3]{5}$ (د) 125

④ أى مما يلى يكافئ $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ؟ (أ) $2\sqrt{6}$ (ب) $6\sqrt{2}$ (جـ) 6 (د) $\sqrt{70}$

⑤ أى مما يلى يكافئ $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{15}}$ ؟ (أ) $\frac{5}{15}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (جـ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (د) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

⑥ إذا كان : $\sqrt{160}=X\sqrt{10}$ فما قيمة X ؟ (أ) 8 (ب) 6 (جـ) 4 (د) 3

⑦ إذا كان : $\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2}\,a$ فما قيمة a ؟ (أ) 30 (ب) $\sqrt[3]{30}$ (جـ) 15 (د) $\sqrt[3]{15}$

⑧ إذا كان : $2\sqrt{3}\times4a=8\sqrt{6}$ فما قيمة a ؟ (أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) 2 (د) $\sqrt{6}$

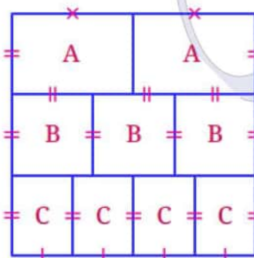
⑨ إذا كان : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$ فما قيمة a ؟ (أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6}$ (جـ) 3 (د) 9

⑩ إذا كان : $X+\sqrt{28}=\sqrt{7}$ فما قيمة X ؟ (أ) $\sqrt{21}$ (ب) $-\sqrt{21}$ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) $-\sqrt{7}$

---

⑦ مربع مساحته 432 سم^2 قُسم إلى مستطيلات ومربعات كما بالشكل،

فما هو الفرق بين محيطى الشكلين B ، A ؟



5 قوانين الأسس في الاعداد الحقيقية

الضرب المتكرر فى مجموعة الأعداد الحقيقية

يستخدم التعبير الرياضى a^n للتعبير عن حاصل ضرب العدد الحقيقى a فى نفسه n من المرات.

$a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$

(الأس: n ، الأساس: a ، عدد حقيقى مكرر n مرة)

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

$= (\sqrt{2})^5$ الأس = 5 ، الأساس = $\sqrt{2}$

- $(-a)^n = a^n$ إذا كان n عددًا صحيحًا زوجيًا.
- $(-a)^n = -a^n$ إذا كان n عددًا صحيحًا فرديًا.

مثال

أوجد قيمة كل مما يأتى :

1. $(-\sqrt{5})^4$
2. $-(\sqrt{5})^4$
3. $(-\sqrt{5})^3$

الحل

1. $(-\sqrt{5})^4$

$= -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5}$

$= 5 \times 5$

$= 5^2 = 25$

2. $-(\sqrt{5})^4$

$= -(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5})$

$= -(5 \times 5)$

$= -(5)^2 = -25$

3. $(-\sqrt{5})^3$

$= -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5}$

$= 5 \times -\sqrt{5}$

$= -5\sqrt{5}$

تدريب

أوجد قيمة كل مما يأتى :

1. $(-\sqrt{2})^5$
2. $-(\sqrt{2})^5$
3. $(-\sqrt{2})^6$

....

....

الأس الصفرى والأس السالب

قاعدة

$a^0 = 1$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر

أمثلة :

$5^0 = 1$ ، $(\sqrt{3})^0 = 1$ ، $(-\sqrt[3]{4})^0 = 1$

قاعدة

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ حيث a عدد حقيقى لا يساوى الصفر

أمثلة :

$(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})^{-3} = (\sqrt[3]{4})^3 = 4$, $(\sqrt{3})^{-4} = (\frac{1}{\sqrt{3}})^4 = \frac{1}{(\sqrt{3})^4} = \frac{1}{9}$

قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية

أولا قـوانيـن الضـرب

عند ضرب القوى التى لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونجمع الأسس $a^m \times a^n = a^{m+n}$

أمثلة : $a^{-3} \times a^5 = a^{-3+5} = a^2$, $2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$

عند إيجاد قوة حاصل ضرب عددين يُوزع الأس على كل من العددين. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

مثال : $(3\sqrt{2})^2 = (3)^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

ملاحظة

$(a+b)^n \neq a^n + b^n$ $(a-b)^n \neq a^n - b^n$

ثانيا قـوانيـن القسـمة

عند قسمة القوى التى لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونطرح الأسس $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

مثال : $\frac{(\sqrt[3]{7})^5}{(\sqrt[3]{7})^2} = (\sqrt[3]{7})^{5-2} = (\sqrt[3]{7})^3 = 7$

عند إيجاد قوة خارج قسمة عددين يُوزع الأس على كل من العددين. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

مثال : $(\frac{6}{\sqrt{3}})^2 = \frac{6^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{36}{3} = 12$

مثال

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

① $\frac{(6\,a)^2}{2\,a}$ ② $\frac{(-\sqrt{3}\,a\,b)^4}{3\,a^4\,b^2}$ ③ $\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5}$

الحل

① $\frac{(6\,a)^2}{2\,a} = \frac{6^2 \times a^2}{2 \times a}$

$= \frac{36\,a^2}{2\,a} = 18\,a^{2-1}$

$= 18\,a$

الحل

② $\frac{(-\sqrt{3}\,a\,b)^4}{3\,a^4\,b^2}$

$= \frac{(-\sqrt{3})^4 \times a^4 \times b^4}{3 \times a^4 \times b^2}$

$= \frac{9}{3} \times a^{4-4} \times b^{4-2}$

$= 3 \times a^0 \times b^2$

$= 3 \times 1 \times b^2 = 3\,b^2$

③ $\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5}$

$= \frac{(2\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5}$

$= \frac{2^4 \times (\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{2^5 \times (\sqrt{2})^5}$

$= (2)^{4-5} \times (\sqrt{2})^{4+3-5}$

$= (2)^{-1} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 2 =$

تدريب

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

① $\frac{(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-1}}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^{-2}}$ ② $\frac{(\sqrt{18})^5 \times (\sqrt{2})^3}{(\sqrt{12})^4}$

....

....

....

مثال

اختصر لأبسط صورة كلًا مما يأتى :

① $(\sqrt{6})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 1$

الحل

① $(\sqrt{6})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$

$= (\sqrt{3} \times \sqrt{2})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$

$= (\sqrt{3})^n \times (\sqrt{2})^n \times (\sqrt{3})^{n-1} \times (\sqrt{2})^{-n}$

$= (\sqrt{3})^{n+n-1} \times (\sqrt{2})^{n-n}$

$= (\sqrt{3})^{2n-1} \times (\sqrt{2})^0$

$= (\sqrt{3})^{2n-1} \times 1$

$= (\sqrt{3})^{2n-1}$

عند $n = 1$:

$\therefore (\sqrt{3})^{2n-1} = (\sqrt{3})^{2\times1-1} = \sqrt{3}$

② $\dfrac{(10)^{2n} \times 0.001}{(10)^{-n+1} \times 100}$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 2$

الحل

② $\dfrac{10^{2n} \times 0.001}{10^{-n+1} \times 100}$

$= \dfrac{10^{2n} \times 10^{-3}}{10^{-n+1} \times 10^{2}}$

$= \dfrac{10^{2n-3}}{10^{-n+1+2}} = \dfrac{10^{2n-3}}{10^{-n+3}}$

$= 10^{(2n-3)-(-n+3)}$

$= 10^{2n-3+n-3} = 10^{3n-6}$

عند $n = 2$:

$\therefore 10^{3n-6} = 10^{3\times2-6} = 10^{6-6} = 10^{0} = 1$

تدريب

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

① $\dfrac{(\sqrt{5})^{n} \times (\sqrt{3})^{2-n}}{3 \times (\sqrt{15})^{-n}}$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = -2$

....
....
....

② $\dfrac{1000 \times 0.1^{n} \times 10^{n-1}}{10^{n+2}}$

....
....
....
....
....

مثال

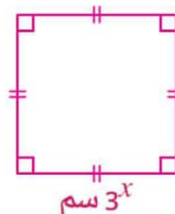
فى الشكل المقابل :

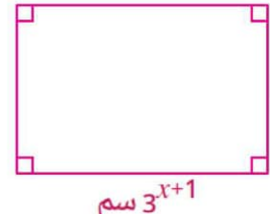
مربع طول ضلعه 3^{x} سم

ومستطيل بعداه 3^{x+1} سم ، 3 سم.

إذا كان محيط المربع = 20 سم،

فأوجد مساحة المستطيل.





الحل

$\because$ محيط المربع = 20 سم

$\therefore 4 \times 3^{x} = 20$

$\therefore 3^{x} = \dfrac{20}{4} = 5$

$\because$ مساحة المستطيل A = الطول × العرض

$\therefore A = 3^{x+1} \times 3 = 3^{x} \times 3 \times 3$

$= 5 \times 9 = 45$

$\therefore$ مساحة المستطيل = 45 سم^{2}.

تدريب

إذا كان : $3^{x} = 4$ فأوجد القيمة العددية لكل من : ① 3^{x+1} ② 3^{x-1} ③ $3^{x+2} + 3^{x+3}$



الواجب

① اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة :

(1) $\frac{(-2xy)^{-3}}{x^{-4}y^{-3}}$ (2) $\frac{-3a^2b \times 4a^{-1}b^{-2}}{12(ab)^{-2}}$

(3) $(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}})^4$ (4) $\frac{(\sqrt{3})^3 \times 27}{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^4}$

(5) $\frac{(\sqrt{18})^2 \times (\sqrt{2})^{-1}}{(\sqrt{8})^{-1}}$ (6) $\frac{(2)^{2n+1} \times (3)^{2n+1}}{(6)^{2n}}$

---

② اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة :

(1) $\frac{(\sqrt{6})^{n+2} \times (\sqrt{3})^n}{4 \times (\sqrt{2})^{n-2}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 1$

(2) $\frac{10^{-n} \times 0.01}{10^{-n-6} \times 10^n}$ $n = 3$

---

③ إذا كانت : $x = \sqrt{2}$ ، $y = \sqrt{6}$ ، فما قيمة $\frac{y^6 x^{-4}}{x^2}$ ؟

---

④ إذا كانت : $x = 2\sqrt{3}$ ، $y = 3\sqrt{2}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار $(x^2 - y^2)^{-1}$

⑤ إذا كانت : $2^x = 5$ فأوجد قيمة كل من :

(1) 2^{x+1} (2) 2^{1-x} (3) $2^{x+2} + 2^{x+3}$

⑥ **اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :**

① ما ناتج $\frac{(a\,b)^3}{b^3}$ ؟ (أ) a^3 (ب) $\frac{a}{b}$ (جـ) $\frac{a^3}{b^2}$ (د) $\frac{a^2}{b^3}$

② ما قيمة $\frac{7}{(\sqrt{7})^0} - (\frac{7}{\sqrt{7}})^0$ ؟ (أ) 0 (ب) 6 (جـ) 1 (د) -6

③ ما ناتج $(\sqrt{3})^{-4} \times (\sqrt{3})^3$ ؟ (أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (جـ) 3 (د) $\frac{1}{3}$

④ ما ناتج $(\frac{\sqrt{5}}{10})^{-1}$ ؟ (أ) $2\sqrt{5}$ (ب) $5\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ (د) 2

⑤ ما محيط المربع الذى مساحته a سم^2 ؟ (أ) a^4 سم (ب) $(\sqrt{a})^4$ سم (جـ) $4\sqrt{a}$ سم (د) $4\,a$ سم

⑥ ما قيمة $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ ؟ (أ) 4^2 (ب) 4^3 (جـ) 4^8 (د) 4^{16}

⑦ إذا كان : $2^{x-1} = 1$ فما قيمة x ؟ (أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) -2

⑧ إذا كان : $(\sqrt{6})^{x} \times \sqrt{6} = 1$ فما قيمة x ؟ (أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) -2

⑨ ما $\frac{1}{5}$ العدد $(\sqrt[3]{5})^6$ ؟ (أ) 5 (ب) 25 (جـ) $\sqrt[3]{5}$ (د) $(\sqrt[3]{5})^8$

⑩ إذا كانت : $2^{x} = 3$ فما قيمة 2^{x+1} ؟ (أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 9

---

⑦ إذا كانت : $x = \sqrt{5}$ ، $y = 5$ فأوجد قيمة $x^{-10}\,y^{10}$

---

⑧ صنع نجار صندوقًا خشبيًا على شكل متوازى مستطيلات قاعدته على شكل مربع طول ضلعه $2\sqrt{7}$ قدم وارتفاعه $3\sqrt{7}$ قدم، فما حجم الصندوق ؟

---

⑨ أى مما يأتى يعبر عن الوسط الحسابى للعددين 2^{x} ، 2^{x+1} حيث $x \in Z$ ؟

(أ) 2 (ب) 2^{2x+1}

(جـ) $2^{x-1} + 2^{x}$ (د) $2^{x+1} + 2^{x}$

6 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

تذكر

العدد 12 يمكن تحليله إلى : 6 × 2 أو 4 × 3 أو 12 × 1 أو 2 × 2 × 3

كذلك العدد 18 يمكن تحليله إلى" 6 × 3 أو 9 × 2 أو 18 × 1 أو 2 × 3 × 3

لذلك فإن ع . م . أ للعددين 12 ، 18 هو العدد 6

ونعبر عنها كالتالي : $12 + 18 = 6 \times (2 + 3)$

و بنفس الطريقة يمكن تحليل كثيرات الحدود

التعبيرات الرياضية كثيرات الحدود

كثيرة الحدود هى تعبير رياضى فيه جميع أسس متغيراته أعداد صحيحة موجبة.

مثل

$-3xy$

$4xy^2 + 2x$

$2x^2 + 3y + 8$

جميعها كثيرات حدود.

تدريب

بين أي من المقادير التالية كثيرة حدود وأيها ليست كثيرة حدود

$2x^3$ ــ كثيرة حدود	$3x^{-2}$ ليست كثيرة حدود	$3x^{\frac{1}{2}} + 2$ ليست كثيرة حدود

تحليل كثيرة الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ)

لاحظ أن عملية التحليل هي عملية عكسية لتوزيع الضرب على الجمع والطرح

تحليل
$6x^2 - 15x = 3x(2x - 5)$
توزيع

مثال

حل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

الحل

1. $8x^2 - 16$
حيث إن ع . م . أ هو 8
$\therefore 8x^2 - 16 = 8(x^2 - 2)$

2. $15x^2y^2 - 30xy^3$
حيث إن ع . م . أ هو $15xy^2$
$\therefore 15x^2y^2 - 30xy^3 = 15xy^2(x - 2y)$

3. $2a^3b^2 + 8a^2b^3 - 16ab$
$2ab(a^2b + 4ab^2 - 8)$

4. $-4x^4 + 12x^3 - 8x^2$
$-4x^2(x^2 - 3x + 2)$

لاحظ في المثال الرابع : معامل أول حد سالب فكان من الأفضل أخذ إشارة ع . م . أ سالبة

تدريب

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $12x^2 + 16$ ....

2) $6a^4 - 5a^2$ ....

3) $4x^3 - 8x^2 + 12x$ ....

4) $36ab - 24a^2b - 18ab^2$ ....

كثيرة الحدود الأولية هي كثيرة حدود لا يمكن تحليلها. مثل : $3x^2 + 4y^2$ ، $2x^4 + 7$

مثال

أوجد القيمة العددية لكل مما يأتى باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $19 \times 23 + 19 \times 27$

3) $25 \times 158 - 25 \times 57 - 25$

2) $37 \times 163 - 37 \times 26 - (37)^2$

الحل

$19 \times 23 + 19 \times 27$

$= 19\,(23 + 27)$

$= 19 \times 50 = 950$

$37 \times 163 - 37 \times 26 - 37 \times 37$

$= 37\,(163 - 26 - 37)$

$= 37 \times 100 = 3700$

$25 \times 158 - 25 \times 57 - 25 \times 1$

$= 25\,(158 - 57 - 1)$

$= 25 \times 100 = 2500$

تدريب

1) $83 \times 57 + 83 \times 43$ ....

2) $43 \times 87 - 43 \times 30 + (43)^2$ ....

3) $13 \times 115 - 13 \times 16 + 13$ ....

تحليل كثيرات الحدود التي تحتوي على أقواس مكررة

مثال

حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

1) $12x(x + y) - 18y(x + y)$

2) $(x - 5)^2 - 2(x - 5)$

3) $(x + 3)^2 - x - 3$

الحل

حيث إن ع . م . أ هو $6(x + y)$

$\therefore 12x(x + y) - 18y(x + y)$

$= 6(x + y)(2x - 3y)$

حيث إن ع . م . أ هو $(x - 5)$

$\therefore (x - 5)^2 - 2(x - 5)$

$= (x - 5)(x - 5 - 2)$

$= (x - 5)(x - 7)$

$(x + 3)^2 - x - 3$

$= (x + 3)^2 - (x + 3)$

$= (x + 3)(x + 3 - 1)$

$= (x + 3)(x + 2)$

تدريب

حل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

(1) $16a(a-b)+24b(a-b)$ (2) $(x+2)^2+3(x+2)$ (3) $(x-5)^2-x+5$

....

مسائل التعويض

مثال

إذا كان $2x+y=7$ ، $x+2y=8$

فأوجد القيمة العددية للمقدار : $2x(x+2y)+y(x+2y)$

الحل

يمكن استخدام التحليل بإخراج ع . م . أ لتبسيط المقدار المعطى كالتالى :

$$2x(x+2y)+y(x+2y)=(x+2y)(2x+y)$$

$$=8\times7=56$$

تدريب

إذا كان $(5a+4b)=65$ ،

$5a(2a-3b)+4b(2a-3b)=195$

أوجد القيمة العددية للمقدار $(2a-3b)$

....

خاصية هامة

إذا كان a ، b عددين حقيقيين ، وكان $a\times b=0$ فإن:

إما $a=0$ أو $b=0$ أو كليهما يساوى صفر

مثال

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1) $3x^2 + 6x = 0$

الحل

$\because 3x^2 + 6x = 0$ $\therefore 3x(x + 2) = 0$

$\therefore$ إما $3x = 0$ ومنها $x = 0$

أو $x + 2 = 0$ ومنها $x = -2$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{0, -2\}$

2) $10x^3 - 25x^2 = 0$

الحل

$\because 10x^3 - 25x^2 = 0$

$\therefore 5x^2(2x - 5) = 0$

$\therefore$ إما $5x^2 = 0$ ومنها $x = 0$

أو $2x - 5 = 0$ ومنها $x = \frac{5}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{0, \frac{5}{2}\}$

3) $x^2 = 3x$

الحل

$\because x^2 = 3x$ $\therefore x^2 - 3x = 0$

$\therefore x(x - 3) = 0$

$\therefore$ إما $x = 0$

أو $x - 3 = 0$ ومنها $x = 3$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{0, 3\}$

خلي بالك

هنا لا يمكن قسمة طرفي المعادلة على X

لأن أحد حلول المعادلة هيبقى X = 0
والقسمة على 0 غير ممكنة

تدريب

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1) $x^2 + 2x = 0$

....
....
....

2) $2x^2 - 3x = 0$

....
....
....

3) $15x^3 + 12x^2 = 0$

....
....
....



الواجب

① حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

① $12y + 4$ | ② $4m - mn$ | ③ $15a - 25b$

④ $18a + 27ab$ | ⑤ $-7k - 49m$ | ⑥ $9a^2b - 6ab^2 + 3ab$

⑦ $2a - 4ab - 6abc$ | ⑧ $x^2y^3 + x^2y^2 + x^3y^2$

⑨ $-4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 12x^2$ | ⑩ $16a^6 - 4a^4 + 12a^2$

---

② حلل كثيرات الحدود الآتية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

① $a(b+5) + 2(b+5)$ | ② $(4x-1) - y(4x-1)$ | ③ $(2x-3)^2 - 2(2x-3)$

④ $(7x-5)^2 - 7x + 5$ | ⑤ $(x+2)^3 - 2(x+2)^2$ | ⑥ $3x + 6 - (x+2)^2$

---

③ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

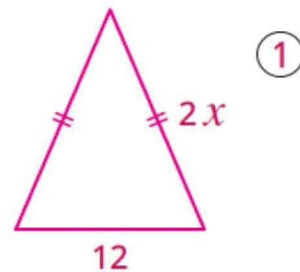
① $x^2 - x = 0$ | ② $4x^2 + 8x = 0$ | ③ $5x - x^2 = 0$

④ $x^2 = 5x$ | ⑤ $2x^2 - 3x = 0$ | ⑥ $12x^2 - 4x = 0$

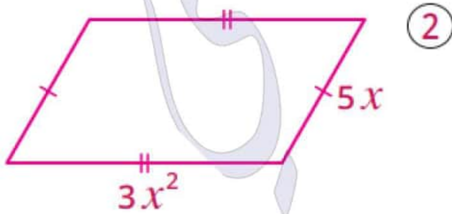
---

④ أوجد محيط كل من الشكلين التاليين فى صورة عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

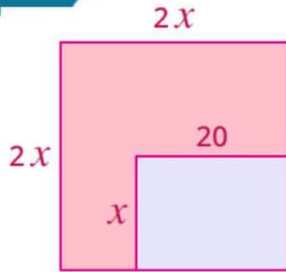
①



②



⑤ مهندس لديه قطعة أرض على شكل مربع طول ضلعه ($2x$) م ،
أراد أن يبنى عليها بيتًا على شكل مستطيل بُعداه x م , 20 م، وأن يستخدم المساحة المتبقية كحديقة كما بالشكل ، أوجد مساحة الحديقة واكتب الناتج كحاصل ضرب عاملين باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.



---

⑥ **اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :**

① ما العامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $8x - 12x^2$ ؟ (أ) 2 (ب) 4 (جـ) $2x$ (د) $4x$

② أى مما يلى يمثل تحليلًا لكثيرة الحدود $16x^2 - 24x^3$ بإخراج ع . م . أ ؟
(أ) $8x(2x-3x^2)$ (ب) $4x^2(4-6x)$ (جـ) $8x^2(2-3x)$ (د) $8(2x^2-3x^3)$

③ $6a - 8b =$ .... (أ) $6(a-2b)$ (ب) $4(2a-4b)$ (جـ) $2(3a-4b)$ (د) $14(a-b)$

④ $x^2y - xy^2 =$ .... (أ) $xy(x-y)$ (ب) $x^2y(1-y)$ (جـ) $xy^2(x-1)$ (د) $xy(y-x)$

⑤ $x(a+b) + y(a+b) =$ ....
(أ) $(x-y)(a-b)$ (ب) $(x+y)(a+b)$ (جـ) $(x-y)(a+b)$ (د) $(x+y)(a-b)$

⑥ إذا كان $a - b = 7$ ، $x + y = 10$ فإن : $x(a-b) - y(b-a) =$ ....
(أ) 3 (ب) 17 (جـ) 51 (د) 70

---

⑦ إذا كان : $14x + 10 = a(7x + b)$, $6x + 9 = c(2x + d)$

أوجد القيمة العددية للمقدار $b^a + d^c$

---

⑧ اكتب ثلاثية حدود بحيث يكون العامل المشترك الأكبر لحدودها هو $3x^2$

7 تحليل المقادير ثلاثية الحدود

ضرب

$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

تحليل

عملية تحليل ثلاثية الحدود هى عملية عكسية لعملية الضرب.

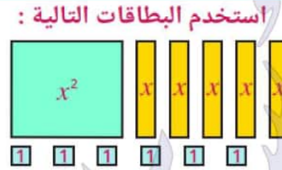
فمثلًا: لتحليل ثلاثية الحدود $x^2 + 5x + 6$

ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما 6 ومجموعهما 5 ، تجد أن العددين هما 2 و 3

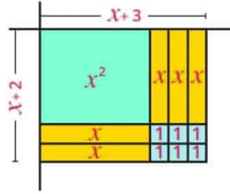
أى أن : $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

يمكنك استخدام نماذج البطاقات لتحليل $x^2 + 5x + 6$

استخدم البطاقات التالية :



كون مستطيلًا مستخدمًا جميع البطاقات كالتالى :



$\therefore x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

كيفية تحليل ثلاثية الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$

نوجد عددان حاصل ضربهما c ومجموعهما b وليكن العددان هما m , n

ثم نكتب التحليل على الصورة: $(x+m)(x+n)$

مثال

أكمل ما يأتي :

1. عددان حاصل ضربهما 40 ومجموعهما 13 هما .... ، ....
2. عددان حاصل ضربهما 40 والفرق بينهما 18 هما .... ، ....
3. عددان حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 13 هما .... ، ....
4. عددان حاصل ضربهما 12 والفرق بينهما 1 هما .... ، ....

الحل

8 , 5

20 , 2

12 , 1

4 , 3

مثال

حلل كلًا مما يأتى :

1. $x^2 + 7x + 12$
2. $x^2 - 6x + 8$
3. $x^2 + x - 12$
4. $x^2 - 7x - 18$

الحل (1)

عددان ضربهم 12 ومجموعهم 7 هما 4 , 3
لاحظ العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط
والصغير إشارته تنتج من ضرب إشارة الأوسط في الأخير
فتكون الإجابة
$(x+4)(x+3)$

الحل (2)

عددان ضربهم 8 ومجموعهم 6 هما 4 , 2
لاحظ العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط
والصغير إشارته تنتج من ضرب إشارة الأوسط في الأخير
فتكون الإجابة
$(x-2)(x-4)$

الحل (3)

عددان ضربهم 12 الفرق بينهم 1 هما 4 , 3
لاحظ العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط
والصغير إشارته تنتج من ضرب إشارة الأوسط في الأخير
فتكون الإجابة
$(x+4)(x-3)$

الحل (4)

عددان ضربهم 18 الفرق بينهم 7 هما 9 , 2
لاحظ العدد الأكبر يأخذ إشارة الحد الأوسط
والصغير إشارته تنتج من ضرب إشارة الأوسط في الأخير
فتكون الإجابة
$(x-9)(x+2)$



تدريب

(1) x^2+5x+4 ....

(2) $x^2-11x+24$ ....

(3) $x^2-3x-28$ ....

(4) x^2+x-42 ....

تحليل المقادير الثلاثية التي تحتاج ترتيب حدودها واستخراج ع .م .أ

ولكي تتم عملية التحليل كاملة يجب الوصول إلى كتابة الحدود في صورة حواصل ضرب كثيرات حدود أولية

مثال حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

	الحل
(1) $3x^2+6x-72$ لاحظ : الخطوة الأولى إخراج ع .م .أ الخطوة الثانية تحليل الثلاثي	(1) $3x^2+6x-72$ $=3(x^2+2x-24)$ $=3(x+6)(x-4)$
(2) $12x-3x^3-9x^2$ لاحظ : الخطوة الأولى ترتيب حدود المقدار الخطوة الثانية إخراج ع .م .أ الخطوة الثالثة تحليل الثلاثي	(2) $=-3x^3-9x^2+12x$ $=-3x(x^2+3x-4)$ $=-3x(x-1)(x+4)$
(3) $x^2-5xy+6y^2$	(3) $=(x-3y)(x-2y)$
(4) $y(y+1)-30$ لاحظ : فك الأقواس بالتوزيع	(4) $=y^2+y-30$ $=(y+6)(y-5)$
(5) $x^6-10b^4-3x^3b^2$ لاحظ : ترتيب الحدود حسب أسس أحد الرموز	(5) $=x^6-3x^3b^2-10b^4$ $=(x^3+2b^2)(x^3-5b^2)$



تدريب

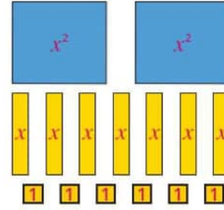
حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

(1) $4x^2-8x-60$
....
....
....

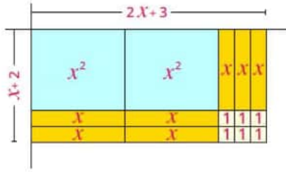
(2) $-x^2-13x-36$
....
....
....

ثانياً تحليل ثلاثية الحدود على الصورة $a x^2 + b x + c$ حيث $(a \neq \pm 1)$

يمكن استخدام نماذج البطاقات لتحليل $2x^2 + 7x + 6$ استخدم البطاقات التالية :



كـون مسـتطيلًا مسـتخدمًا جميع البطاقات كالتالى :



$\therefore 2x^2 + 7x + 6$
$= (2x+3)(x+2)$

مثال

حلل كلًا مما يأتى :

1) $2x^2 + 7x + 6$

$(2x \quad +3)$
$(x \quad +2)$

$4x + 3x = 7x$ (الحد الأوسط)

التحليل الناتج هو

$(2x+3)(x+2)$

2) $4x^2 + x - 3$

$(4x \quad -3)$
$(x \quad +1)$

$4x - 3x = x$ (الحد الأوسط)

التحليل الناتج هو

$(x+1)(4x-3)$

3) $2x^4 + 9x^2 + 10$

يوجد طرق كثيرة
نتتبع أسهلهم
للوصول للإجابة

التحليل الناتج هو

$(2x^2+5)(x^2+2)$

تدريب

حلل المقدار التالي تحليلا تاما :

$3x^4 + 11x + 6$

....
....
....

حل المعادلات باستخدام التحليل

مثال

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1) $x^2 + 5x - 36 = 0$

لاحظ : التعويض بالقيمة 4 أو -9 يجعل طرفي المعادلة متساويان

الحل

$\because x^2 + 5x - 36 = 0$ $\quad \therefore (x-4)(x+9) = 0$ ①

$\therefore$ إما $x - 4 = 0$ ومنها $x = 4$

أو $x + 9 = 0$ ومنها $x = -9$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{4 , -9\}$

② $x^2 + 30 = -13x$

لاحظ :
التعويض بالقيمة -3 أو -10
يجعل طرفي المعادلة متساويان

② $\because x^2 + 30 = -13x$

$\therefore x^2 + 13x + 30 = 0$

$\therefore (x+3)(x+10) = 0$

$\therefore$ إما $x + 3 = 0$ ومنها $x = -3$

أو $x + 10 = 0$ ومنها $x = -10$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-3 , -10\}$

---

③ $6x^2 - 13x + 6 = 0$

لاحظ :
التعويض بالقيمة $\frac{3}{2}$ أو $\frac{2}{3}$
يجعل طرفي المعادلة متساويان

③ $\because 6x^2 - 13x + 6 = 0$

$\therefore (2x-3)(3x-2) = 0$

$\therefore$ إما $2x - 3 = 0$ ومنها $x = \frac{3}{2}$

أو $3x - 2 = 0$ ومنها $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\frac{3}{2} , \frac{2}{3}\}$

تدريب

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

①	②	③	④
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x^2 - 3x = 10$	$-x^2 + 24 = 5x$	$3x^2 + 11x - 20 = 0$
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

مثال



لدى سارة حديقة مستطيلة الشكل، مساحتها $(3x^2 + 4x - 7)$ م^2.
استخدم التحليل لإيجاد بُعدين ممكنين للحديقة، وإذا أرادت سارة توسيع الحديقة بحيث يكون كل بُعد أكبر مما كان عليه بمقدار 3 م، فما هى مساحة الحديقة بعد توسيعها ؟

الحل

$\because$ مساحة الحديقة $= (3x^2 + 4x - 7)$ م^2

$= (3x + 7)(x - 1)$

$\therefore$ عرض الحديقة $= (x - 1)$ م ، طول الحديقة $= (3x + 7)$ م

وبعد توسيع الحديقة يكون عرضها $= (x - 1 + 3) = (x + 2)$ م

وطولها $= (3x + 7 + 3) = (3x + 10)$ م

$\therefore$ مساحة الحديقة بعد توسيعها $= (3x + 10)(x + 2)$

$= (3x^2 + 16x + 20)$ م^2



الواجب

① حل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^2-7x+12$
② $y^2+42+13y$
③ $-x^2+3x+40$
④ $14x-32+x^2$
⑤ $3x^2+6x-45$
⑥ $5n^2-20n-105$
⑦ $3a^2-6a-9$
⑧ $2x^2-7x+6$
⑨ $3x^2+14x+15$
⑩ $6x^2+7xy-3y^2$
⑪ $5x^2-4y(7x+3y)$
⑫ $(x+2)(x-5)-8$
⑬ $6x^3-60x-2x^2$
⑭ $18-21x^2-9x^4$
⑮ $42x^2y^2-30x^2y^4+12x^2y^3$

---

② حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

① $m^2-14m+45=0$

② $x^2-21=4x$

③ $3y^2+17y+10=0$

---

③ يوسف لديه حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 6 م ، 15 م، ويريد زيادة مساحتها بمقدار 46 م^2. فإذا زاد طول وعرض الحديقة بنفس المقدار ، فما هى الأبعاد الجديدة للحديقة ؟

---

④ مثلث مساحته 35 سم^2، فإذا كان طول قاعدته يزيد 9 سم عن الارتفاع المناظر لها، فما ارتفاع المثلث ؟

⑤ اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :

① أي مما يلي يمثل تحليل كثيرة الحدود $x^2 + x - 20$ ؟

(أ) $(x-4)(x+5)$ (ب) $(x+4)(x+5)$ (جـ) $(x-4)(x-5)$ (د) $(x+4)(x-5)$

② أي المخططات الآتية يمثل تحليل كثيرة الحدود : $9x^2 - 9x - 4$ ؟

(أ) $(3x \quad -4)$ / $(3x \quad +1)$

(ب) $(3x \quad -2)$ / $(3x \quad +2)$

(جـ) $(9x \quad -1)$ / $(x \quad +4)$

(د) $(9x \quad -4)$ / $(x \quad +1)$

③ إذا كان : $(x-3)(x+5) = 0$ ، فأى مما يلى صحيح ؟

(أ) $x = 3$ أو $x = 5$ (ب) $x = 3$ أو $x = -5$ (جـ) $x = -3$ أو $x = 5$ (د) $x = -3$ أو $x = -5$

④ إذا كان : $x^2 + a\,x + 15 = (x+3)(x+b)$ ، فما قيمة $a\,b$ ؟

(أ) 5 (ب) 8 (جـ) 13 (د) 40

⑤ إذا كان : $x^2 - 11\,x + 28 = (x-a)(x-b)$ ، فما قيمة $a + b$ ؟

(أ) -16 (ب) -11 (جـ) 11 (د) 16

⑥ إذا كان : $(x-5)$ أحد عاملى ثلاثية الحدود $(2x^2 - 7x - 15)$ ، فما العامل الآخر ؟

(أ) $x+3$ (ب) $2x-3$ (جـ) $2x+3$ (د) $x-3$

⑦ إذا كان : $2x + 3y = 5$, $3x - 2y = 6$ ، فما القيمة العددية لكثيرة الحدود $(6x^2 + 5xy - 6y^2)$ ؟

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 30

---

⑥ أوجد قيم b الصحيحة الموجبة التى تجعل كلًا مما يأتى قابلًا للتحليل :

① $x^2 + b\,x + 12$ ② $x^2 + b\,x - 14$ ③ $x^2 + 8\,x + b$

8 تحليل الحالات الخاصة

أولا الثلاثي الذي يمثل مربع كامل

ويكون تحليله كالتالي

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

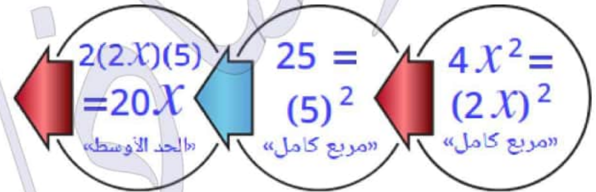
المربع الكامل

- الحد الأول مربع كامل.
- الحد الثالث مربع كامل.
- الحد الأوسط يساوي ($\sqrt{\text{الحد الثالث}} \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times 2 \pm$).

مثال

بين أيًا من كثيرات الحدود الآتية تمثل مربعًا كاملًا وأيها ليست مربعًا كاملًا، ثم حل كثيرة الحدود التى على صورة مربع كامل :

1) $4x^2 + 20x + 25$



∴ كثيرة الحدود $(4x^2 + 20x + 25)$ تمثل مربعًا كاملًا ويكون :

$$4x^2 + 20x + 25 = (\sqrt{4x^2} + \sqrt{25})^2 = (2x + 5)^2$$

لاحظ أن إشارة القوس تأخذها من إشارة الحد الأوسط في المقدار

---

2) $x^2 - 6x - 9$

كثيرة الحدود $(x^2 - 6x - 9)$ ليست مربعًا كاملًا لأن الحد الثالث (-9) سالب أى ليس مربعًا كاملًا.

---

3) $x^2 + 9x + 81$

$x^2 = (x)^2$ «مربع كامل»



$81 = (9)^2$ «مربع كامل»



$2(x)(9) = 18x$ «لا يساوى الحد الأوسط»



∴ كثيرة الحدود $(x^2 + 9x + 81)$ ليست مربعًا كاملًا.

---

4) $25x^4 - 30x^2y + 9y^2$

$$25x^4 - 30x^2y + 9y^2 = (\sqrt{25x^4} - \sqrt{9y^2})^2 = (5x^2 - 3y)^2$$

تدريب

1. $16b^2 - 8b + 1$
2. $5x^2 + 20x + 4$
3. $x^2 + 2xy - y^2$
4. $9x^4 - 12x^2y + 4y^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

إيجاد الحد الناقص لجعل المقدار ثلاثي مربع كامل

الحد الثالث	الحد الأوسط	الحد الأول
مربع الأوسط ÷ (4 × الأول)	$\pm 2\sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثالث}}$	مربع الأوسط ÷ (4 × الثالث)

مثال

أوجد قيمة a التى تجعل كلًا مما يأتى مربعًا كاملًا :

1. $x^2 + 14x + a$
2. $x^2 - ax + 64$

الحل

1. لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$a = \frac{(14x)^2}{4(x^2)} = \frac{196x^2}{4x^2} = 49$$

2. لكى تكون كثيرة الحدود مربعًا كاملًا

$$-ax = \pm 2(\sqrt{x^2})(\sqrt{64})$$

$$= \pm 16x$$

$$\therefore a = \pm 16$$

تدريب

أوجد قيمة a التى تجعل كلًا مما يأتى مربعًا كاملًا :

1. $x^2 - 10x + a$
2. $4x^2 + ax + 49$

....

....

....

....

....

....

تحليل الفرق بين مربعين

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال

حلل كلًا مما يأتى :

1. $x^2 - 9$
   الحل: $(x - 3)(x + 3)$
2. $9x^4 - 16y^2$
   الحل: $(3x^2 - 4y)(3x^2 + 4y)$
3. $1 - 100x^2y^2$
   الحل: $(1 - 10xy)(1 + 10xy)$

تدريب

حلل كلًا مما يأتى :

1. $x^2 - 1$ ....
2. $16x^2 - 9$ ....
3. $25x^2 - 36y^2$ ....
4. $x^2y^2 - 4$ ....

تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال

حلل كلًا مما يأتى :

1. $x^3 - 27$
   الحل: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
2. $a^6 - 8b^3$
   الحل: $(a^2 - 2b)(a^4 + 2a^2b + 4b^2)$
3. $1 + 512x^3y^3$
   الحل: $(1 + 8xy)(1 - 8xy + 64x^2y^2)$

تدريب

حلل كلًا مما يأتى :

1. $x^3 + 1$ ....
2. $m^3 - 343n^3$ ....
3. $8x^6 - 27y^3$ ....
4. $27 - a^3b^3$ ....

مثال

حلل كلًا مما يأتى :

1. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{25}y^2$
2. $8y^3 - \frac{1}{27}$

الحل

$= (\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y)$

$= (2y - \frac{1}{3})(4y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9})$

3 $a^3 b^3 + \frac{1}{216}$

$= (a\,b + \frac{1}{6})\,(a^2 b^2 - \frac{1}{6} a\,b + \frac{1}{36})$

4 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}$

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = (\frac{1}{2}x + \frac{2}{3})^2$

تدريب حلل كلًا مما يأتى :

1 $y^2 - \frac{1}{9}$ ………………

2 $27x^3 - \frac{1}{64}$ ………………

3 $c^3 + \frac{1}{8}$ ………………

4 $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ………………

خلي بالك عند وجود عامل مشترك أعلى للمقدار يجب أخذه قبل تحليل الأقوس

مثال حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

1 $5x^5 - 320x^2$

$= 5x^2(x^3 - 64)$

$= 5x^2(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

2 $16x^4 - y^4$

$= (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)$

$= (2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$

3 $12x - 9x^2 - 4$

$-9x^2 + 12x - 4$

$= -(9x^2 - 12x + 4)$

$= -(3x - 2)^2$

4 $64 - (a + b)^2$

$= (8 + (a + b))\,(8 - (a + b))$

$= (8 + a + b)(8 - a - b)$

تدريب حلل كلًا مما يأتى :

1 $8x^3 - 18x$ ………………

2 $75x^3y + 60x^2y + 12xy$ ………………

3 $\frac{1}{3}x^2 - 3$ ………………

4 $32x^3(3a + b) - 50x(3a + b)$ ………………

مثال

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتى :

الحل

1. $(57)^2 + 2\,(57)\,(43) + (43)^2$ $= (57 + 43)^2 = (100)^2 = 10000$
2. $(99)^2 - 1$ $= (99 + 1)\,(99 - 1) = 100 \times 98 = 9800$

تدريب

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة كل مما يأتى :

1. $(49)^2 - 2\,(49)\,(39) + (39)^2$ ....
2. $(87)^2 - (13)^2$ ....

مثال

إذا كان : $2x - 3y = 5$ ، $4x^2 - 9y^2 = 115$ أوجد القيمة العددية للمقدار : $2x + 3y$

الحل

$\because 4x^2 - 9y^2 = 115$

$\therefore (2x - 3y)\,(2x + 3y) = 115$

$\therefore 5\,(2x + 3y) = 115$

$\therefore 2x + 3y = 23$

تدريب

إذا كان : $a^2 - b^2 = 12$ ، $b - a = -3$ أوجد القيمة العددية للمقدار : $a + b$

....



الواجب

① حلل كلًا مما يأتى :

① $a^2 + 18a + 81$
② $b^2 - 14b + 49$
③ $9x^2 + 6x + 1$
④ $25 - 9x^2$
⑤ $1 - 4a^2b^2$
⑥ $k^2 - 36m^2$
⑦ $y^3 - 8$
⑧ $x^3 + 27$
⑨ $64x^3 - 125y^3$

---

② حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^4 + 8x^3 + 16x^2$
② $2xy^4 - 16yx^4$
③ $121y - y^3$
④ $20x^3 - 45x$
⑤ $-27x^2 + 75$
⑥ $x^4 - 81$
⑦ $54x^3 + 16$
⑧ $ax^4 - 343axb^3$
⑨ $4x^4 + 4000x$

---

③ حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^2 - \frac{4}{81}$
② $125x^3 + \frac{1}{8}$
③ $\frac{1}{5}x^2 - 5$
④ $(x+3)^3 + 64$
⑤ $(x+3)^2 - 16$
⑥ $6a^2(x+2y) - 24b^2(x+2y)$
⑦ $x^4 - 13x^2 + 36$
⑧ $x^6 - 7x^3 - 8$
⑨ $m^6 - 64n^3$
⑩ $4x^{16} - 16y^4$
⑪ $x^6 - 64y^6$

④ حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

① $4x^2+1=4x$ | ② $x^3=25x$ | ③ $x^2+6x=-9$

---

⑤ حديقة تتكون من قطعتى أرض متجاورتين، الكبرى على شكل مربع مساحته $(25x^2+10x+1)$ م^2، والصغرى على شكل مربع مساحته $(4x^2+4x+1)$ م^2، ويراد عمل سور حول الحديقة.
أوجد طول السور بدلالة x، ثم أوجد محيط الحديقة إذا كانت x تساوى 10 م.



---

⑥ اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :

① إذا كان : $x^2-b^2=(x-3)(x+3)$ فما قيمة b ؟ (أ) ± 1 (ب) ± 3 (جـ) ± 6 (د) ± 9

② إذا كان : $ax^2-b=(3x-2)(3x+2)$ فما قيمة $a+b$ ؟ (أ) -13 (ب) 13 (جـ) -5 (د) 5

③ إذا كان : $ax^3-27=(2x-3)(4x^2+bx+9)$ فما قيمة ab ؟ (أ) 6 (ب) 12 (جـ) 24 (د) 48

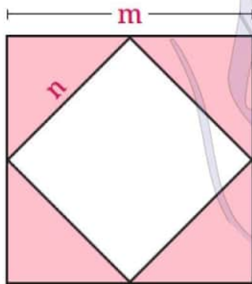
④ إذا كانت كثيرة الحدود $(4x^2+kx+1)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k ؟ (أ) ± 1 (ب) ± 2 (جـ) ± 4 (د) ± 8

⑤ إذا كانت كثيرة الحدود $(kx^2-12x+9)$ مربعًا كاملًا، فما قيمة k ؟ (أ) 4 (ب) ± 4 (جـ) 2 (د) ± 2

⑥ إذا كان : $x^2-y^2=-16$ ، $x-y=-2$ فما الوسط الحسابى للعددين x، y ؟ (أ) 2 (ب) 4 (جـ) 8 (د) 16

⑦ أى العبارات الآتية تمثل مساحة المنطقة الملونة بالشكل المقابل ؟
(أ) $5x^2-2y^2$ (ب) $25x-4y$ (جـ) $(5x-2y)^2$ (د) $(5x-2y)(5x+2y)$

⑦ فى الشكل المقابل :
مجموع محيطى المربعين يساوى 76 سم،
ومساحة المنطقة الملونة تساوى 57 سم^2.
كم يساوى $(m-n)$ ؟



9 التحليل بالتقسيم

الحالة الأولى

تحليل المقدار الرباعي إلى ثنائيتين

تحلل كل ثنائية

ثم نأخذ المشترك بين كل ثنائية

الحالة الثانية

تحليل المقدار الرباعي إلى ثلاثية مربع كامل والحد الرابع مربع كامل أيضا

بحيث يتم تحليل المقدار كفرق بين مربعين

مثال

حلل كلًا مما يأتى تحليلاً تاماً :

(1) $ax + by + ay + bx$

الحل

$ax + by + ay + bx$

$= (ax + ay) + (by + bx)$

$= a(x + y) + b(y + x)$

$= (x + y)(a + b)$

(2) $3x^2 - 3y + xy - 9x$

الحل

$3x^2 - 3y + xy - 9x$

$= (3x^2 - 9x) + (xy - 3y)$

$= 3x(x - 3) + y(x - 3)$

$= (x - 3)(3x + y)$

(3) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

الحل

$3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

$= (3x^3 + 2x^2) + (-3x - 2)$

$= x^2(3x + 2) - (3x + 2)$

$= (3x + 2)(x^2 - 1)$

$= (3x + 2)(x - 1)(x + 1)$

(4) $x^2 - 5x - y^2 + 5y$

الحل

$= (x^2 - y^2) + (5y - 5x)$

$= (x - y)(x + y) + 5(y - x)$

$= (x - y)(x + y) - 5(x - y)$

$= (x - y)(x + y - 5)$

(5) $2x^3y - 6x^2y - 18xy + 54y$

الحل

$= 2y(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$

$= 2y[(x^3 - 3x^2) + (-9x + 27)]$

$= 2y[x^2(x - 3) - 9(x - 3)]$

$= 2y(x - 3)(x^2 - 9)$

$= 2y(x - 3)(x - 3)(x + 3)$

$= 2y(x - 3)^2(x + 3)$

تدريب

حل كلًا مما يأتى تحليلاً تاماً :

① $x^2+4x+bx+4b$

② $xy+12-3x-4y$

....

③ $2x^2y^2+24xy-6xy^2-8x^2y$

④ $x^3+6x^2-4x-24$

....

مثال

حل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

الحل

① $x^2+16y^2-8xy-49$

$=(x^2-8xy+16y^2)-49$

$=(x-4y)^2-(7)^2$

$=(x-4y-7)(x-4y+7)$

② $4m^2-n^2+10nk-25k^2$

$=4m^2-(n^2-10nk+25k^2)$

$=4m^2-(n-5k)^2$

$=[2m-(n-5k)][2m+(n-5k)]$

$=(2m-n+5k)(2m+n-5k)$

تدريب

① $x^2-12xy+36y^2-4$

② $x^2+y^2-64+2xy$

....

مثال

حل $3x^2+8x+4$ باستخدام التحليل بالتقسيم.

الحل

$\because a=3 , b=8 , c=4$

أوجد عددين حاصل ضربهما (a c) [12] ومجموعهما (b) [8] $\therefore$ العددان هما 2 ، 6

أعِد كتابة $8x$ فى صورة جمع $(6x+2x)$ ثم استخدم التحليل بالتقسيم كما يلى :

$3x^2+8x+4=3x^2+6x+2x+4=(3x^2+6x)+(2x+4)$

$=3x(x+2)+2(x+2)$

$=(x+2)(3x+2)$

تدريب

استخدم التحليل بالتقسيم لتحليل كل من ثلاثيتى الحدود الآتيتين :

① $2x^2-x-28$

② $6x^2+19x+15$

التحليل بإكمال المربع

هو إضافة حد إلى ثنائية أو ثلاثية لكي تصبح مربع كامل

ويكون ذلك بإحدى الطريقتين

1) إما إضافة (الحد الأوسط) = ($\pm 2\sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$) فمثلًا :

$(x^2 + 49)$ يُضاف إليها $\pm 2\sqrt{x^2}\sqrt{49} = \pm 14x$

فيكون $(x^2 \pm 14x + 49)$ مربعًا كاملًا أي يكتب على الصورة $(x \pm 7)^2$

2) وإما إضافة (الحد الثالث) = $\frac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4 \times \text{الحد الأول}}$ فمثلًا :

$(x^2 + 10x)$ يُضاف إليها $\frac{(10x)^2}{4x^2} = 25$

فيكون $(x^2 + 10x + 25)$ مربعًا كاملًا أي يكتب على الصورة $(x + 5)^2$

مثال

حل كلًا مما يأتى :

1) $81x^4 + 4$

2) $x^4 + 15x^2y^2 + 64y^4$

الحل

1)

$81x^4 + 4 = 81x^4 + 4 + 36x^2 - 36x^2$

« إضافة وطرح $36x^2 = 2\sqrt{81x^4}\sqrt{4}$ »

$= (81x^4 + 36x^2 + 4) - (36x^2)$

$= (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2$

$= (9x^2 + 2 - 6x)(9x^2 + 2 + 6x)$

$= (9x^2 - 6x + 2)(9x^2 + 6x + 2)$

2)

$x^4 + 15x^2y^2 + 64y^4$

$= x^4 + 15x^2y^2 + 64y^4 + 16x^2y^2 - 16x^2y^2$

« إضافة وطرح $16x^2y^2 = 2\sqrt{x^4}\sqrt{64y^4}$ »

$= (x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4) + 15x^2y^2 - 16x^2y^2$

$= (x^2 + 8y^2)^2 - x^2y^2$

$= (x^2 + 8y^2 - xy)(x^2 + 8y^2 + xy)$

تدريب

1) $x^4 + 64$

....
....
....
....
....
....
....

2) $4x^4 + 11x^2 + 9$

....
....
....
....
....
....
....

حل المعادلات باستخدام التحليل بالتقسيم

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 8x + 3 = 0$ فى R

الحل

$\because x^2 - 8x + 3 = 0$

$\therefore x^2 - 8x = -3$

بإضافة $\frac{(-8x)^2}{4x^2} = 16$ إلى طرفى المعادلة

$\therefore x^2 - 8x + 16 = -3 + 16$

$\therefore (x-4)^2 = 13$

$\therefore x - 4 = \pm\sqrt{13}$ $\therefore x = 4 \pm \sqrt{13}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{4 - \sqrt{13} , 4 + \sqrt{13}\}$

تدريب أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 2x - 4 = 0$ فى R

....

....

....

....

مثال إذا كان $2x - y = 8$ ، $x^2 + 3y = 31$ ،
فما القيمة العددية للمقدار: $2x^3 - x^2y + 6xy - 3y^2$ ؟

الحل

$2x^3 - x^2y + 6xy - 3y^2 = (2x^3 - x^2y) + (6xy - 3y^2)$

$= x^2(2x - y) + 3y(2x - y)$

$= (2x - y)(x^2 + 3y) = 8 \times 31 = 248$

تدريب إذا كان $3b - 2a = 1$ ، $a^2 - 2b = 10$ أوجد القيمة العددية للمقدار :
$2a^3 - 3a^2b - 4ab + 6b^2$

....

....



الواجب

① حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $a x + b x + b + a$

② $12 y + 2 x - 8 x y - 3$

③ $6 m - n + 3 m n - 2$

④ $x^2 - 2 x - x y + 2 y$

⑤ $11 x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6$

⑥ $45 x^3 + 20 x^2 + 9 x + 4$

---

② حلل كلًا من ثلاثيات الحدود الآتية باستخدام التحليل بالتقسيم :

① $2 x^2 + 5 x + 3$

② $4 x^2 - 7 x - 2$

③ $2 x^2 + 13 x + 15$

---

③ حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^2 - y^2 - 6 x - 6 y$

② $x^2 - a^2 - 2 x + 1$

③ $x^4 + 2 x^3 - 9 x^2 - 18 x$

④ $4 x^2 - 12 x y + 9 y^2 - 49$

⑤ $5 a^2 b - 10 a^2 b^2 + 4 b^2 - 8 b^3$

⑥ $m^3 + n^3 - m - n$

⑦ $4 k^4 - 49 k^2 + 14 k - 1$

⑧ $16 x^2 - 25 a^2 + y^2 + 8 x y$

⑨

---

④ حلل كلًا مما يأتى تحليلًا تامًا :

① $x^4 + 4 y^4$

② $4 m^4 + 1$

③ $64 x^4 + y^4$

④ $a^4 + a^2 b^4 + b^8$

⑤ $y^4 - 23 y^2 + 1$

⑥ $x^4 - 11 x^2 + 1$

⑦ $16 x^4 \quad 20 a^2 b^2 \quad 9 b^4$

⑧ $k^5 + 5 k^3 + 9 k$

⑨ $4 x^2 (4 x^2 - 7 y^2) + y^4$

⑤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

① $x^3 + x^2 - 4x = 4$ | ② $x^2 + 12x + 15 = 0$

---

⑥ اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي :

① $x^2 - ax + bx - ab =$ ....

(أ) $(x - a)(x - b)$ (ب) $(x - a)(x + b)$ (جـ) $(x + a)(x - b)$ (د) $(x + a)(x + b)$

② إذا كان : $xy + 5x + 7y + 35 = (x + a)(y + b)$ ، فما قيمة $a - b$ ؟

(أ) 2 (ب) -2 (جـ) 12 (د) -12

③ إذا كان : $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + a)(x + b)(x + c)$، فما قيمة $a + b + c$ ؟

(أ) 2 (ب) 5 (جـ) 7 (د) 9

④ إذا كان : $x + b = 5$ ، $x^2 + a = 12$ ، فما القيمة العددية للمقدار $(x^3 + bx^2 + ax + ab)$ ؟

(أ) 7 (ب) 17 (جـ) 30 (د) 60

⑤ عند إكمال المربع للمقدار : $(x^2 + 9)$ نضيف إليه ....

(أ) $\pm 3x$ (ب) $\pm 6x$ (جـ) $\pm 9x$ (د) $\pm 12x$

⑥ عند إكمال المربع للمقدار : $(x^2 + 12x)$ نضيف إليه ....

(أ) ± 9 (ب) ± 36 (جـ) 9 (د) 36

⑦ إذا كان : $(x^2 + 2x + 2)$ أحد عاملى المقدار $(x^4 + 4)$ فما العامل الآخر ؟

(أ) $x^2 - 2x + 2$ (ب) $x^2 - 2x - 2$ (جـ) $x^2 + x + 2$ (د) $x^2 - x + 2$

---

⑦ إذا كان $a + b = 3$ أوجد قيمة $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

---

⑧ حلل تحليلًا تامًا : $x^8 - 16y^8$

ثانيا

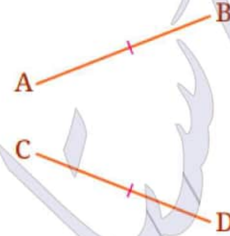
الهندسة

التطابق



تطابق قطعتان مستقيمتان

تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا تساويتا فى الطول.

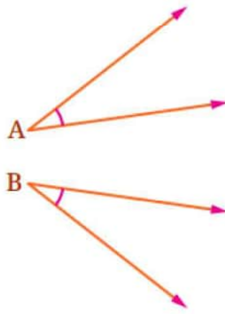


إذا كان : طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{CD}$

فإن : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

تطابق قطعتان مستقيمتان

تتطابق الزاويتان إذا تساويتا فى القياس.



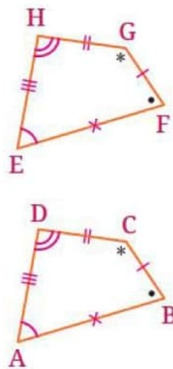
إذا كان : $m(\angle A) = m(\angle B)$

فإن : $\angle A \cong \angle B$

تطابق المضلعات

يتطابق المضلعان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

1. أضلاعهما المتناظرة متساوية فى الطول.
2. زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس.



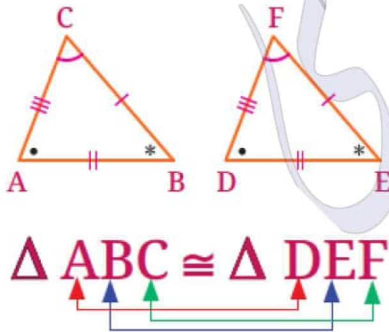
إذا كان ABCD ، EFGH مضلعين فيهما :

1. $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$, $AD = EH$
2. $m(\angle A) = m(\angle E)$, $m(\angle B) = m(\angle F)$, $m(\angle C) = m(\angle G)$, $m(\angle D) = m(\angle H)$

فإن : المضلع ABCD ≅ المضلع EFGH

يجب كتابة المضلعين المتطابقين بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة.

مثال :

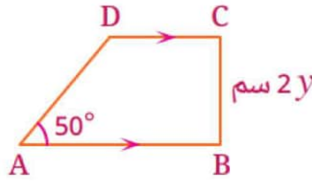


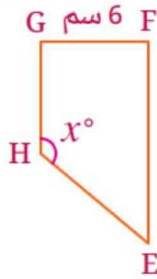
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



فى الشكل المقابل :

إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بدوران ما حول نقطة، فما قيمة كل من x , y ؟







$\because \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\therefore m(\angle A) + m(\angle D) = 180°$ (زاويتان داخليتان وفى جهة واحدة من القاطع $\overleftrightarrow{AD}$)

$\therefore m(\angle D) = 180° - 50° = 130°$

$\because$ المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بالدوران

$\therefore$ المضلع ABCD $\cong$ المضلع EFGH

$\therefore m(\angle H) = m(\angle D) = 130°$ $\therefore x = 130$

$BC = FG = 6$ $\therefore 2y = 6$ $\therefore y = 3$

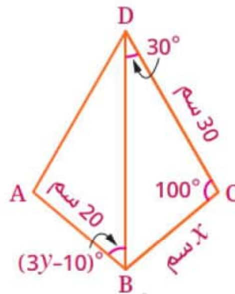


تدريب

فى الشكل التالى :

ΔBCD صورة ΔBAD بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{DB}$

أوجد قيمة كل من x , y

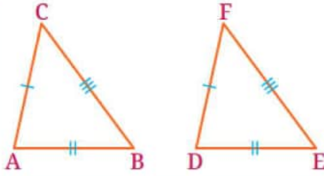


تطابق المثلثات

عناصر المثلث 6	
ثلاثة زوايا AAA	ثلاثة أضلاع SSS

ولاثبات تطابق مثلثين لا يشترط إثبات تطابق كل العناصر المتناظرة ، بل يُكتفى بثلاثة عناصر بينهم ضلع واحد على الأقل

حالات تطابق مثلثين



يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظيره فى المثلث الآخر.

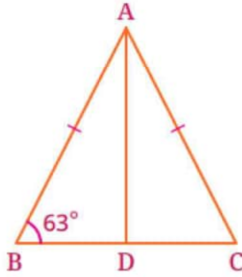
إذا كان : $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$

مثال

فى الشكل المقابل :

النقطة D منتصف $\overline{BC}$ ، $AB = AC$ ، $m(\angle B) = 63°$



1 أثبت أن : $\Delta\, ADB \cong \Delta\, ADC$

2 أوجد بالبرهان : $m(\angle DAC)$



∵ النقطة D منتصف $\overline{BC}$

$\therefore BD = DC$

∵ المثلثين ADC , ADB فيهما :

(ضلع مشترك) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (إثباتًا) $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ (معطى) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

(المطلوب 1) $\therefore \Delta\, ADB \cong \Delta\, ADC$

ومن التطابق ينتج أن :

$m(\angle DAC) = m(\angle DAB)$, $m(\angle C) = m(\angle B) = 63°$

فى المثلث ABC :

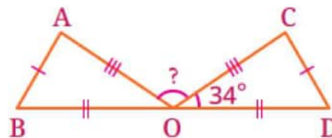
$\therefore m(\angle CAB) = 180° - (63° + 63°) = 54°$

(المطلوب 2) $\therefore m(\angle DAC) = m(\angle DAB) = \frac{54°}{2} = 27°$



تدريب

فى الشكل التالى :



1 برهن أن :

$\Delta\, OAB \cong \Delta\, OCD$

2 أوجد : $m(\angle AOC)$

....

....

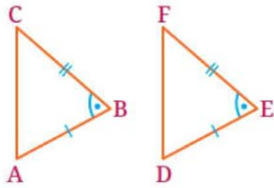
....

الحالة الثانية
ضلعان وزاوية محصورة
SAS

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.

إذا كان : $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، $\angle B \cong \angle E$ ، $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

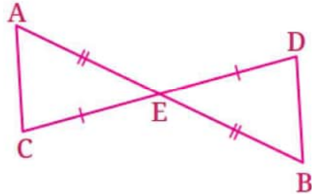




فى الشكل المقابل :

E نقطة منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

برهن أن : ① $\Delta AEC \cong \Delta BED$ ② $\overline{AC} // \overline{DB}$





$\because$ E نقطة منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

$\therefore \overline{AE} \cong \overline{BE}$ ، $\overline{CE} \cong \overline{DE}$

$\because m(\angle AEC) = m(\angle BED)$ (بالتقابل بالرأس)

$\therefore \Delta AEC \cong \Delta BED$ (المطلوب ①)

ومن تطابق المثلثين ينتج أن : $m(\angle A) = m(\angle B)$ وهما زاويتان فى وضع تبادل

$\therefore \overline{AC} // \overline{DB}$ (المطلوب ②)



تدريب

فى الشكل التالى :

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ،

$AB = 3.6$ سم،

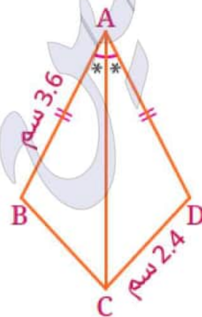
$CD = 2.4$ سم،

$\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle BAD$

① برهن أن :

$\Delta ACB \cong \Delta ACD$

② أوجد محيط المضلع ABCD



....

....

....

....

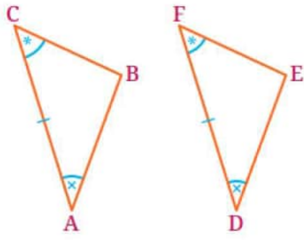
....

الحالة الثالثة
زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما
ASA

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.

إذا كان : $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

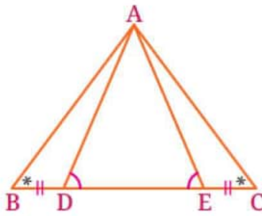


مثال

فى الشكل المقابل :

$\angle B \cong \angle C$, $\angle ADE \cong \angle AED$, $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

أثبت أن : $\Delta ABD \cong \Delta ACE$





$\because m(\angle ADB) + m(\angle ADE) = 180^\circ$, $m(\angle AEC) + m(\angle AED) = 180^\circ$

$\because m(\angle ADE) = m(\angle AED)$ $\therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC)$

$\therefore \angle ADB \cong \angle AEC$

فى المثلثين ACE , ABD :

$\angle B \cong \angle C$ (معطى) , $\overline{BD} \cong \overline{CE}$ (معطى) , $\angle ADB \cong \angle AEC$ (إثباتًا)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE$

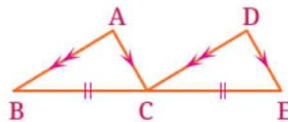


تدريب

فى الشكل التالى :

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{CE}$



برهن أن :

$\Delta ABC \cong \Delta DCE$

....

....

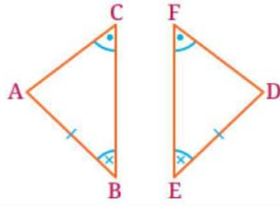
....

....

الحالة الرابعة

زاويتان وضلع غير واصل بين راسيهما ASA

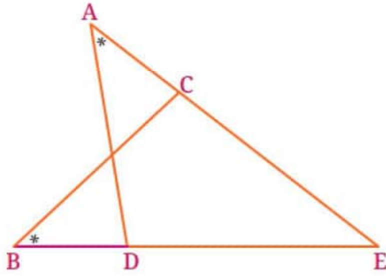
يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير واصل بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر.



إذا كان : $\angle B \cong \angle E \quad , \quad \angle C \cong \angle F \quad , \quad \overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال



فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{BC} , \angle A \cong \angle B$

أثبت أن : $AE = BE$

الحل

فى المثلثين ADE , BCE :

$\because \angle A \cong \angle B$ (معطى) , $\angle E \cong \angle E$ (زاوية مشتركة) , $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (معطى)

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta BCE$

وينتج من التطابق أن : $AE = BE$

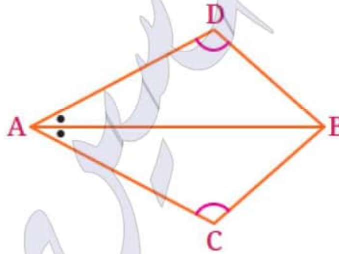


تدريب

فى الشكل التالى :

$\overrightarrow{AB}$ ينصف $\angle DAC$

$\angle ADB \cong \angle ACB$



برهن أن :

$\Delta ACB \cong \Delta ADB$

....

....

....

....

....

....

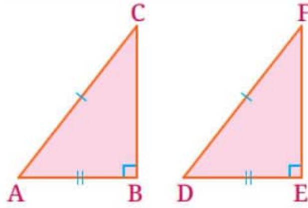
الحالة الخامسة
وتر وأحد ضلعي القائمة
RHS

يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظيريهما فى المثلث الآخر.

إذا كان : $m(\angle B) = m(\angle E) = 90°$

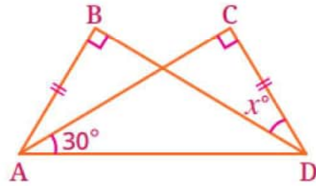
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$





فى الشكل المقابل :
أوجد قيمة x





$\because$ المثلثين ABD , DCA فيهما :

$m(\angle B) = m(\angle C) = 90°$ (معطى) , $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (معطى) , $\overline{AD} \cong \overline{DA}$ (ضلع مشترك)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta DCA$

وينتج من التطابق أن : $m(\angle BDA) = m(\angle CAD) = 30°$

فى المثلث DCA :

$\therefore m(\angle CDA) = 180° - (90° + 30°) = 60°$ $\therefore x = 60 - 30 = 30$

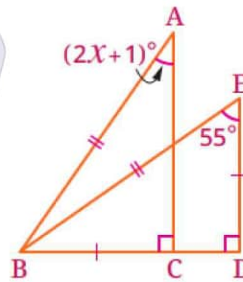


تدريب

فى الشكل التالى :

$BC = DE$, $AB = EB$

1. أثبت أن : $\Delta ACB \cong \Delta BDE$
2. أوجد قيمة : x



....

....

....

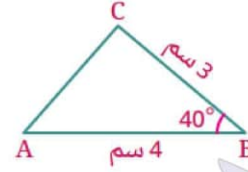
....

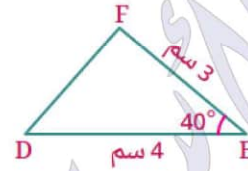
....

الواجب

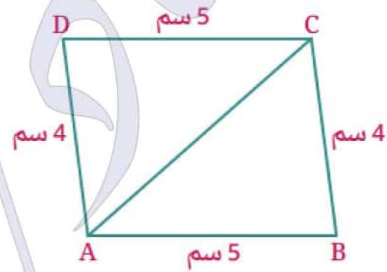
① ما هي الحالة المستخدمة في إثبات تطابق المثلثين في كل مما يأتي:

①

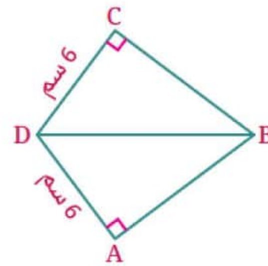




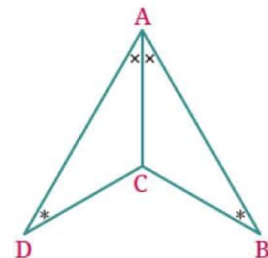
②



③



④



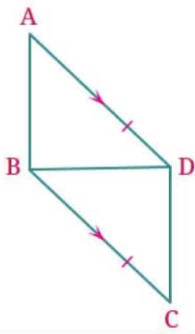
② أجب عن الأسئلة التالية:

① فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

برهن أن :

$\Delta ABD \cong \Delta CDB$

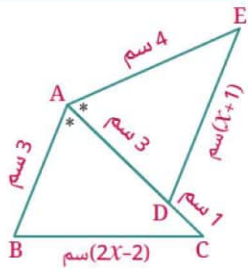


② فى الشكل المقابل :

برهن أن :

$\Delta ABC \cong \Delta ADE$ ،

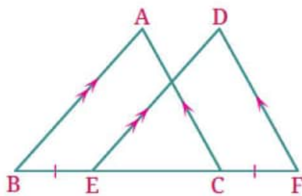
ثم أوجد قيمة X.



③ فى الشكل المقابل :

$\overline{BA} \parallel \overline{ED}$, $\overline{CA} \parallel \overline{FD}$, $\overline{BE} \cong \overline{FC}$

برهن أن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

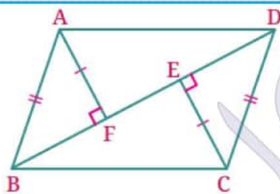


④ فى الشكل المقابل :

برهن أن :

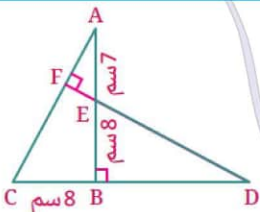
① $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

② $DF = BE$



⑤ فى الشكل المقابل :

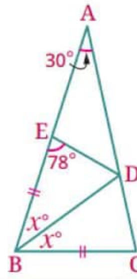
أوجد طول $\overline{BD}$



⑥ فى الشكل المقابل :

① أثبت أن : $\Delta BCD \cong \Delta BED$

② أوجد قيمة x



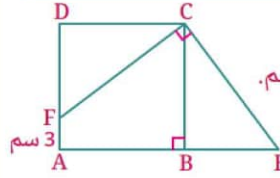
⑦ فى الشكل المقابل :

ABCD مربع طول ضلعه 12 سم.

$AF = 3$ سم , $\overline{CF} \perp \overline{CE}$

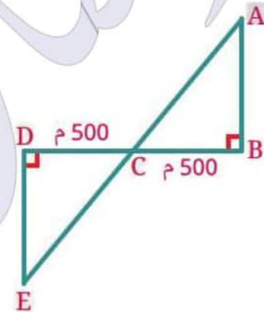
① أثبت أن : $\Delta CBE \cong \Delta CDF$

② أوجد طول $\overline{BE}$



③ إذا كانت $DE = 600$ م،

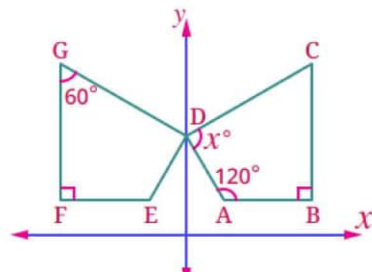
فما المسافة من النقطة A إلى النقطة B ؟



④ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

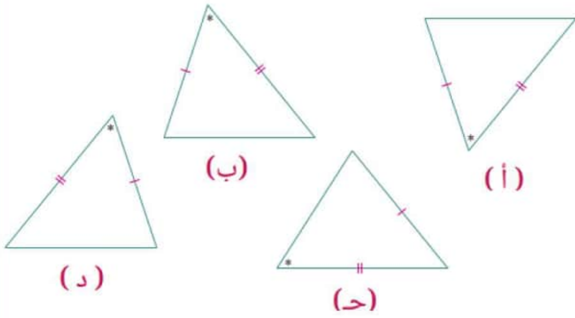
① فى الشكل المقابل : المضلع EFGD صورة المضلع ABCD بالانعكاس فى محور y.

ما قيمة x ؟

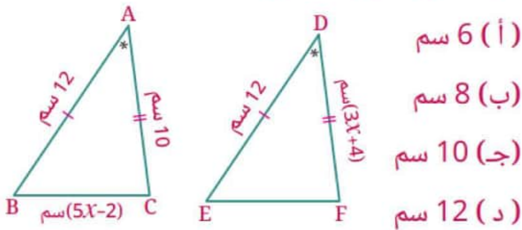


(أ) 90 (ب) 60 (جـ) 120 (د) 70

② أى من المثلثات التالية لا يطابق المثلثات الأخرى؟



③ فى الشكل التالى : ما طول $\overline{EF}$ ؟



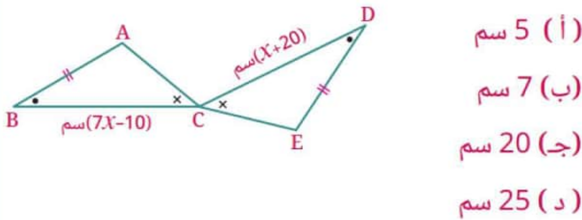
(أ) 6 سم

(ب) 8 سم

(جـ) 10 سم

(د) 12 سم

④ فى الشكل التالى : ما طول $\overline{BC}$ ؟



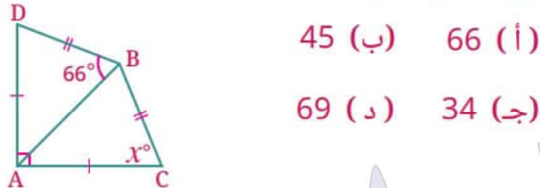
(أ) 5 سم

(ب) 7 سم

(جـ) 20 سم

(د) 25 سم

⑤ فى الشكل التالى : ما قيمة x ؟



(أ) 66 (ب) 45

(جـ) 34 (د) 69

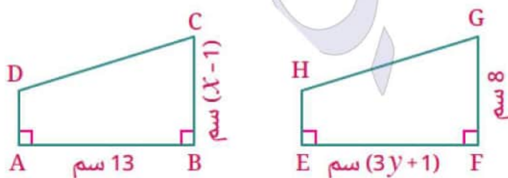
⑥ فى الشكل التالى : ما قيمة $x - y$ ؟



(أ) 9 (ب) 6

(جـ) 5 (د) 1

⑦ فى الشكل المقابل : إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بانتقال ما، فما قيمة $x + y$ ؟

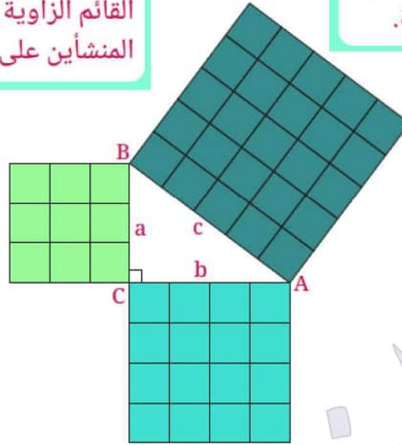


(أ) 15 (ب) 14 (جـ) 13 (د) 12

نظرية فيثاغورث

فـى المثلـث القائـم الزاويـة، مربع طـول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

مسـاحة المربـع المنشـأ علـى الوتر فـى المثلث القائم الزاوية تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة.

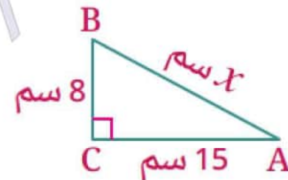


أى أن : $c^2 = a^2 + b^2$ حيث a , b طولا ضلعى القائمة فى المثلث، c طول وتر المثلث

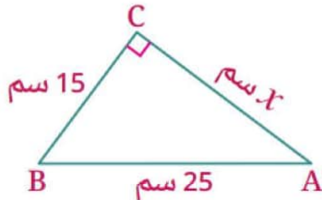
أوجد قيمة X فى كل مما يأتى ، ثم أوجد مساحة المثلث فى الشكل الثانى.



1



2





(1)

$\because c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore X^2 = (8)^2 + (15)^2$

$= 64 + 225 = 289$

$\therefore X = \sqrt{289} = 17$

(2)

$\because c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore (25)^2 = (15)^2 + X^2$

$\therefore X^2 = (25)^2 - (15)^2 = 400$

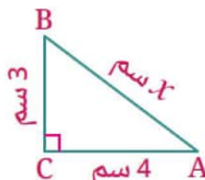
$\therefore X = \sqrt{400} = 20$

$\therefore$ المساحة $= \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = 150$ سم^2

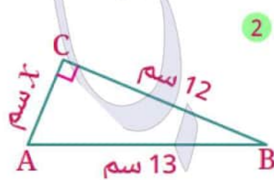


تدريب

1 أوجد قيمة X فى كل مما يأتى، ثم أوجد مساحة المثلث فى الشكل الثانى.



2



....

....

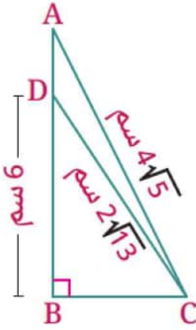


فى الشكل المقابل :

$m(\angle B) = 90°$ ، $AC = 4\sqrt{5}$ سم

$BD = 6$ سم ، $DC = 2\sqrt{13}$ سم

أوجد مع البرهان طول $\overline{AD}$





فى المثلث DBC القائم الزاوية فى B :

$$(BC)^2 = (DC)^2 - (DB)^2 = (2\sqrt{13})^2 - (6)^2 = 16$$

$$\therefore BC = \sqrt{16} = 4$$

فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B :

$$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2 = (4\sqrt{5})^2 - (4)^2 = 64$$

$$\therefore AB = \sqrt{64} = 8 \qquad \therefore AD = AB - BD = 8 - 6 = 2$$

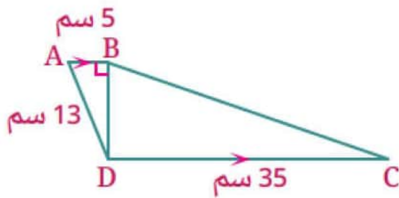
∴ طول $\overline{AD} = 2$ سم



فى الشكل التالى :

إذا كان : $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$

أوجد محيط المضلع ABCD



....

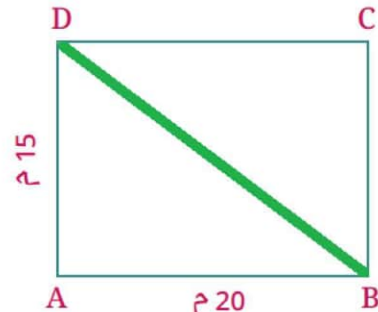
....

....



صمم أسامة حديقة منزلية على شكل مستطيل، ويخطط لعمل ممر بشكل قطرى كما بالشكل.

أوجد طول هذا الممر.





∵ ABCD مستطيل $\therefore m(\angle A) = 90°$

∴ فى المثلث ABD :

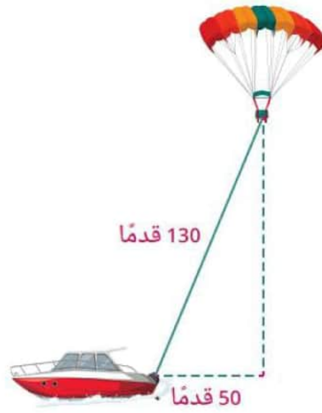
$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = (20)^2 + (15)^2$$
$$= 625$$

∴ طول الممر $= \sqrt{625} = 25$ م .



تدريب

يمثل الشكل تحليق عمر بمنطاد أثناء سحبه باستخدام قارب فى البحر. فما ارتفاع عمر عن مستوى القارب الأفقى؟



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

بعض ثلاثيات فيثاغورث المشهورة

3 , 4 , 5
6 , 8 , 10
9 , 12 , 15
$3x , 4x , 5x$

5 , 12 , 13
10 , 24 , 26
15 , 36 , 39
$5x , 12x , 13x$

8 , 15 , 17
16 , 30 , 34
24 , 45 , 51
$8x , 15x , 17x$

7 , 24 , 25
14 , 48 , 50
21 , 72 , 75
$7x , 24x , 25x$

عكس نظرية فيثاغورث

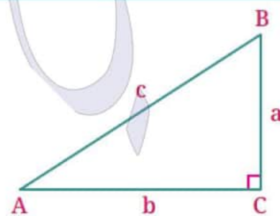
إذا كان مجموع مربعى طولى ضلعين فى مثلث يساوى مربع طول الضلع الثالث كان المثلث قائم الزاوية.

إذا كان المثلث ABC فيه :

$a^2 + b^2 = c^2$

فإن : $m(\angle C) = 90°$

أى أن : المثلث ABC يكون قائم الزاوية فى C





أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

① 15 سم ، 13 سم ، 8 سم ② 24 سم ، 7 سم ، 25 سم



① طول أكبر ضلع = 15

$\because (13)^2 + (8)^2 = 233$,

$\because (15)^2 = 225$

$\therefore (13)^2 + (8)^2 \neq (15)^2$

∴ المثلث غير قائم الزاوية.

② طول أكبر ضلع = 25

$\because (7)^2 + (24)^2 = 625$,

$\because (25)^2 = 625$

$\therefore (7)^2 + (24)^2 = (25)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

تدريب

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

① 41 سم ، 40 سم ، 9 سم

....

② 5 سم ، $3\sqrt{2}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم

....

① 60 سم ، 40 سم ، 30 سم

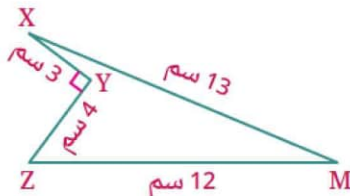
....

مثال

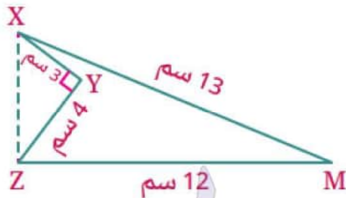
فى الشكل المقابل :

XYZM شكل رباعى غير محدب ، $m(\angle XYZ) = 90°$

أوجد مساحة الشكل الرباعى XYZM







العمل : ارسم $\overline{XZ}$

فى المثلث XYZ القائم الزاوية فى Y :

$\therefore (XZ)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25 \quad \therefore XZ = 5$

فى المثلث XZM :

$\because (XZ)^2 + (ZM)^2 = (5)^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169$,

$(XM)^2 = (13)^2 = 169$

$\therefore (XM)^2 = (XZ)^2 + (ZM)^2 \qquad \therefore m(\angle XZM) = 90°$

∵ مساحة الشكل الرباعى XYZM = مساحة Δ XZM − مساحة Δ XYZ

$\therefore A = (\frac{1}{2} \times 5 \times 12) - (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) = 30 - 6 = 24$

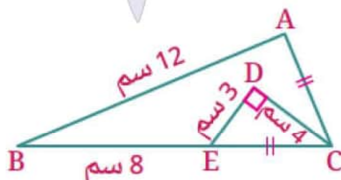
أى أن مساحة الشكل الرباعى XYZM تساوى 24 سم^2.

تدريب

فى الشكل التالى :

EC = AC

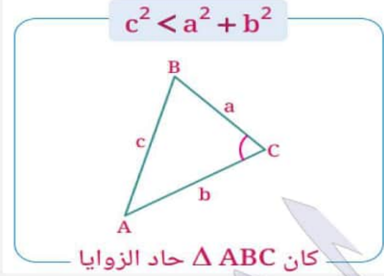
أثبت أن : $m(\angle A) = 90°$



متباينة المثلث

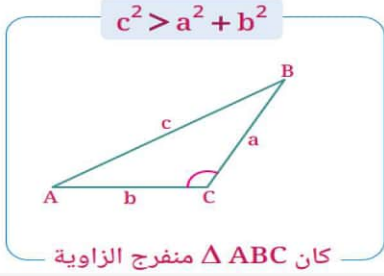
فى المثلث ABC : إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث، وكان :

$c^2 < a^2 + b^2$



كان Δ ABC حاد الزوايا

$c^2 > a^2 + b^2$



كان Δ ABC منفرج الزاوية



مثال عين نوع كل مثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

① 9 سم ، 10 سم ، 11 سم

∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 11 سم

$\because (11)^2 = 121$

$, \quad (9)^2 + (10)^2 = 81 + 100 = 181$

$\therefore (11)^2 < (9)^2 + (10)^2$

∴ المثلث حاد الزوايا.



③ 1.5 سم ، 2 سم ، 2.5 سم

∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = $3\sqrt{3}$ سم

$\because (3\sqrt{3})^2 = 27$

$, \quad (3)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12 = 21$

$\therefore (3\sqrt{3})^2 > (3)^2 + (2\sqrt{3})^2$

∴ المثلث منفرج الزاوية.



② 3 سم ، $2\sqrt{3}$ سم ، $3\sqrt{3}$ سم

∵ طول أكبر ضلع فى المثلث = 2.5 سم

$\because (2.5)^2 = 6.25$

$, \quad (1.5)^2 + (2)^2 = 2.25 + 4 = 6.25$

$\therefore (2.5)^2 = (1.5)^2 + (2)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.

تدريب حدد نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

① 9 سم ، 10 سم ، 11 سم

....
....
....
....

② 3 سم ، $2\sqrt{3}$ سم ، $3\sqrt{3}$ سم

....
....
....
....

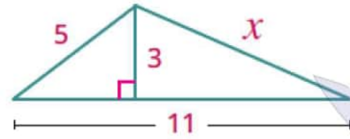
③ 1.5 سم ، 2 سم ، 2.5 سم

....
....
....
....

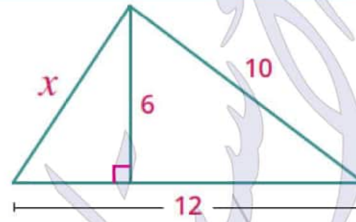
الواجب

① أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

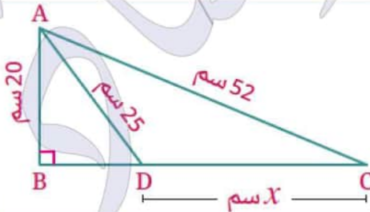
①



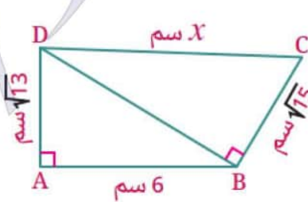
②



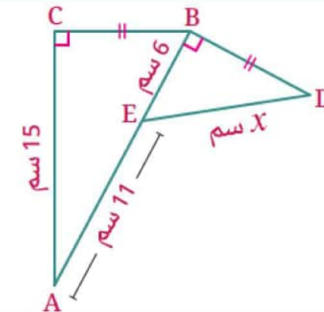
③



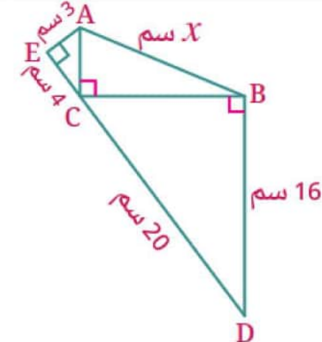
④



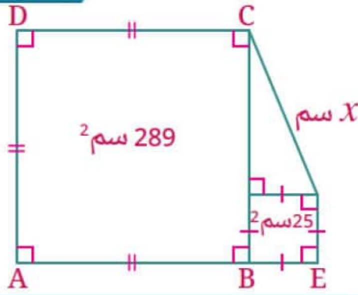
⑤



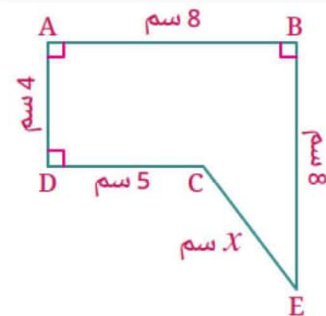
⑥



⑦



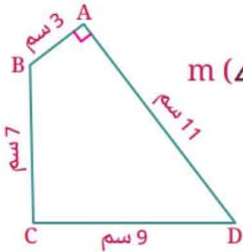
⑧



② أجب عن الأسئلة التالية:

① فى الشكل المقابل :

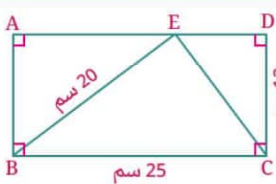
أثبت أن : $m(\angle C) = 90°$



② فى الشكل المقابل :

ABCD مستطيل

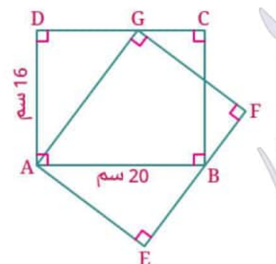
أثبت أن المثلث BEC قائم الزاوية، ثم أوجد مساحته.



③ فى الشكل المقابل :

المستطيل ABCD يطابق المستطيل AGFE

أوجد مع البرهان طول $\overline{BF}$

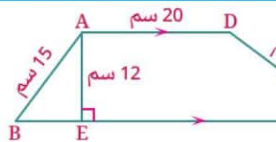


④ فى الشكل المقابل :

ABCD شبه منحرف فيه :

AB = 15 سم ، AD = 20 سم ، DC = 20 سم.

إذا كان ارتفاع شبه المنحرف 12 سم، فأوجد مساحته.

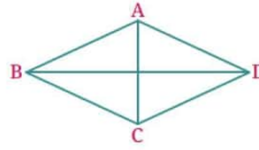


⑥ فى الشكل المقابل :

ABCD معين محيطه 52 م،

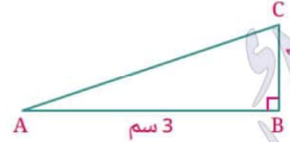
طول قطره $\overline{BD}$ يساوى 24 م.

أوجد مساحة المعين ABCD بالمتر المربع.



③ اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

① فى الشكل المقابل : ما مساحة المربع المنشأ على $\overline{AC}$ ؟



(أ) 4 سم^2 (ب) 2 سم^2 (جـ) 8 سم^2 (د) 10 سم^2

② فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

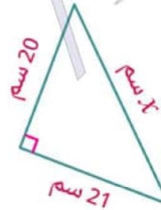


(أ) 1 (ب) 3

(جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt{3}$

③ فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟



(أ) 41 (ب) 29

(جـ) $\sqrt{41}$ (د) $\sqrt{29}$

④ أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ؟

(أ) 7 , 7 , 4 (ب) 12 , 5 , 13

(جـ) 5 , 8 , 7 (د) 3 , 7 , 5

⑤ أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث حاد الزوايا ؟

(أ) $4 , 4 , 4\sqrt{2}$ (ب) 6 , 8 , 10

(جـ) 7.5 , 3.7 , 8 (د) 6 , 6 , 9

⑥ أى من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث منفرج الزاوية ؟

(أ) 24 , 10 , 27 (ب) 2.5 , 2 , 1.5

(جـ) 7 , 7 , 7 (د) $20 , 10 , 10\sqrt{3}$

④ أجب عن كل مما يأتي

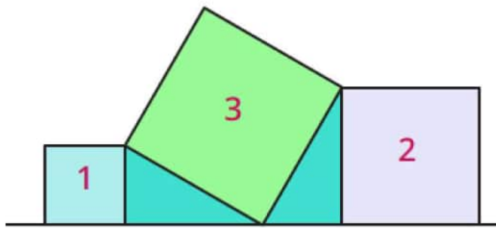
① فى الشكل التالى :

ثلاثة مربعات،

مساحة المربع (1) = 16 سم^2

ومساحة المربع (2) = 48 سم^2

أوجد مع البرهان طول ضلع المربع (3)

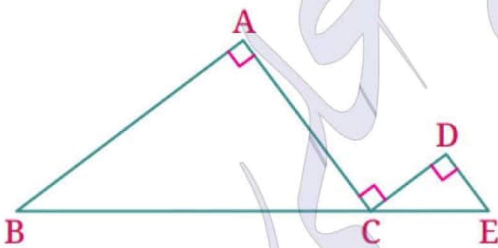


② فى الشكل التالى :

إذا كان : AB + CD = 16 سم،

AC + DE = 12 سم

أوجد مع البرهان طول $\overline{BE}$



بعض تطبيقات التوازي

نظرية 1-3

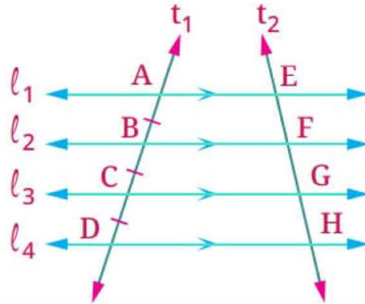
إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأى قاطع آخر تكون متساوية فى الطول.

إذا كانت : $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$ ،

t_1 ، t_2 قاطعين لهم

بحيث $AB = BC = CD$

فإن : $EF = FG = GH$



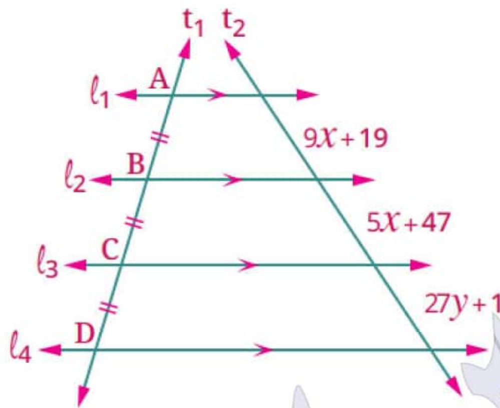
مثال

فى الشكل المقابل :

$\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$

المستقيمان t_1 ، t_2 قاطعان لهم.

أوجد قيمة كل من x ، y.





$\because \ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4 \text{ , } AB = BC = CD$

$\therefore 9x + 19 = 5x + 47 = 27y + 1$

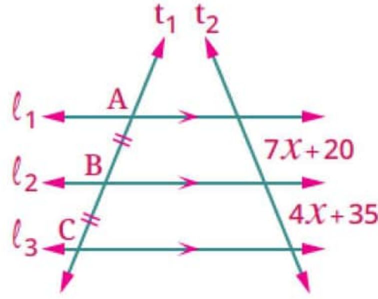
$\therefore 9x + 19 = 5x + 47$ $\therefore 9x - 5x = 47 - 19$

$\therefore 4x = 28$ $\therefore x = \frac{28}{4} = 7$,

$27y + 1 = 5x + 47$ $\therefore 27y + 1 = 5 \times 7 + 47 = 82$

$\therefore 27y = 82 - 1 = 81$ $\therefore y = \frac{81}{27} = 3$

تدريب فى الشكل التالى :



أوجد قيمة x .

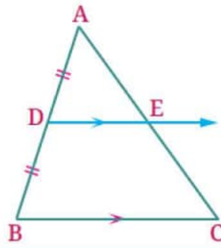
نظرية 3-2

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

إذا كانت : D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$

فإن : E نقطة منتصف $\overline{AC}$

أى أن : $AE = EC$



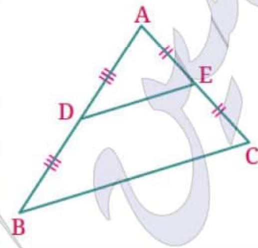
القطعة المستقيمة المتوسطة في المثلث

القطعة المتوسطة فى المثلث هى القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث.

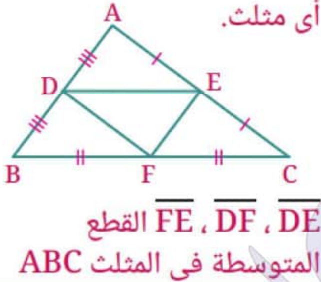
إذا كانت : D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ،

E نقطة منتصف $\overline{AC}$.

فإن : $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC



توجد ثلاث قطع متوسطة فى أى مثلث.



$\overline{DE}$ ، $\overline{DF}$ ، $\overline{FE}$ القطع المتوسطة فى المثلث ABC

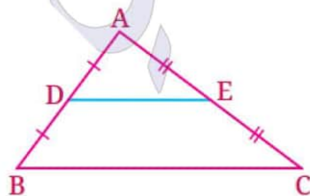
نظرية 3-3 (نظرية القطعة المتوسطة فى المثلث)

القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC

فإن : (1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

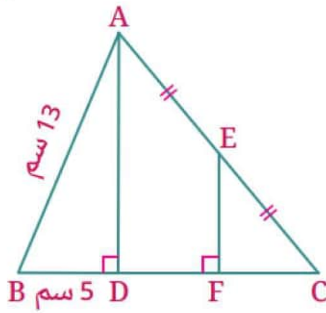
(2) $DE = \frac{1}{2} BC$





فى الشكل المقابل :

أوجد مع البرهان طول $\overline{EF}$





∵ المثلث ABD قائم الزاوية فى D

$\therefore (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$

$\therefore AD = \sqrt{144} = 12$

$\because m(\angle ADB) = m(\angle EFB) = 90°$ (وهما زاويتان فى وضع تناظر)

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{EF}$

فى المثلث ADC : ∵ E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ ∴ F منتصف $\overline{DC}$

$\therefore EF = \frac{1}{2} AD$ $\therefore EF = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

أى أن طول $\overline{EF}$ = 6 سم.



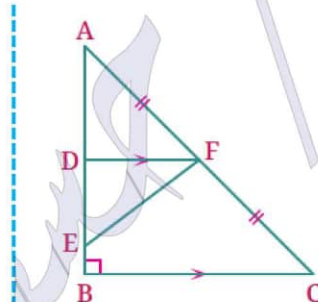
تدريب

فى الشكل التالى :

AB = BC = 16 سم

EB = 2 سم

أوجد طول $\overline{EF}$





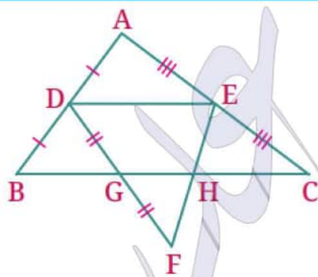


فى الشكل المقابل :

إذا كانت D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$ ،

G منتصف $\overline{DF}$ ،

برهن أن BC = 4 GH





فى المثلث ABC :

∵ D منتصف $\overline{AB}$ ، E منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $DE = \frac{1}{2} BC$

فى المثلث FDE :

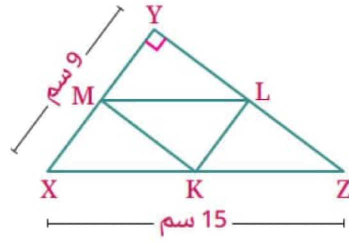
∵ G منتصف $\overline{DF}$ ، $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$ ∴ H منتصف $\overline{EF}$

$\therefore GH = \frac{1}{2} DE$ $\therefore GH = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} BC) = \frac{1}{4} BC$ $\therefore BC = 4\, GH$



تدريب

فى الشكل التالى :



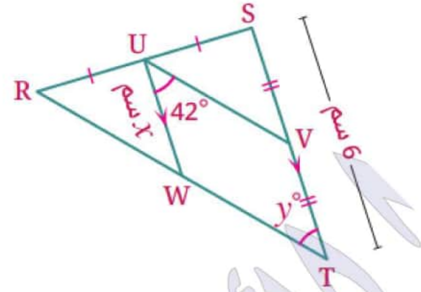
أضلاع المثلث KLM هى القطع المتوسطة فى المثلث XYZ القائم الزاوية فى Y احسب محيط المثلث KLM

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

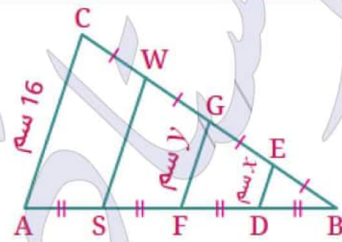
الواجب

① أوجد قيمة X ، Y في كل مما يأتي:

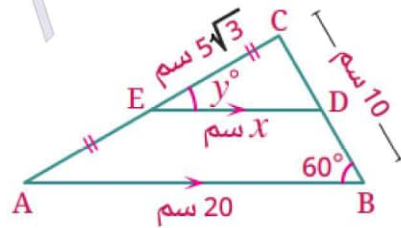
①



②



③



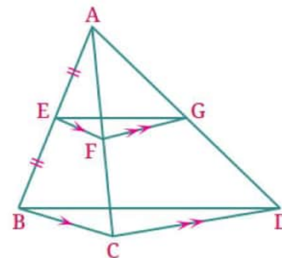
② أجب عن الأسئلة التالية:

① فى الشكل المقابل :

إذا كانت E منتصف $\overline{AB}$ ،

$\overline{EF} // \overline{BC}$ ، $\overline{FG} // \overline{CD}$

برهن أن $BD = 2\,EG$

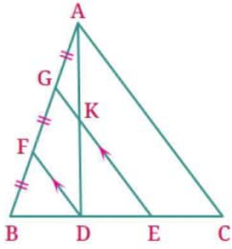


② فى الشكل المقابل :

$GK = 8$ سم ، $\overline{FD} // \overline{GE}$

$AG = GF = FB$

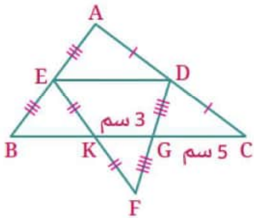
أوجد طول $\overline{KE}$



③ فى الشكل المقابل :

أوجد مع البرهان

طول $\overline{BK}$



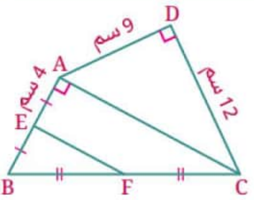
④ فى الشكل المقابل :

ABCD شكل رباعى فيه

F , E منتصفا $\overline{AB}$, $\overline{BC}$

على الترتيب.

أوجد مساحة $\Delta\,BEF$



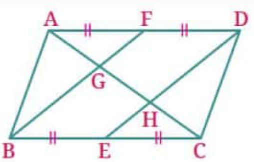
⑤ فى الشكل المقابل :

ABCD متوازى أضلاع ،

إذا كانت F , E منتصفى

$\overline{BC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

فأثبت أن : $AC = 3\,AG$



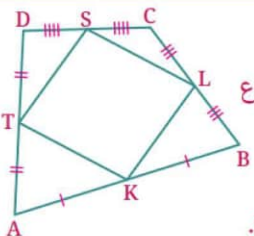
⑥ فى الشكل المقابل :

K , L , S , T منتصفات أضلاع

الشكل الرباعى ABCD

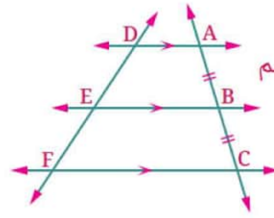
أثبت أن :

الشكل KLST متوازى أضلاع.

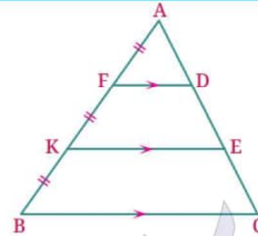


③ اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

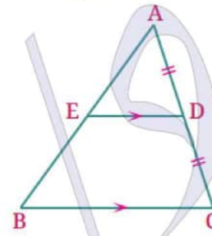
① فى الشكل المقابل :
إذا كان طول $\overline{DF} = 15$ سم
ما طول $\overline{EF}$ ؟
(أ) 10 سم
(ب) 7.5 سم
(جـ) 5 سم (د) 2.5 سم



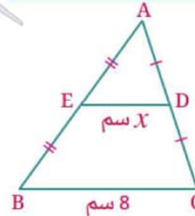
② فى الشكل المقابل :
إذا كان : $AC = 12$ سم
فما طول $\overline{AE}$ ؟
(أ) 3 سم (ب) 4 سم
(جـ) 6 سم (د) 8 سم



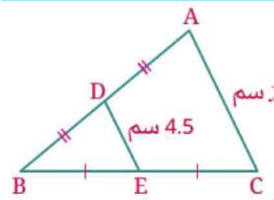
③ فى الشكل المقابل :
إذا كان طول $\overline{EB} = 10$ سم
ما طول $\overline{AB}$ ؟
(أ) 20 سم (ب) 10 سم
(جـ) 7.5 سم (د) 5 سم



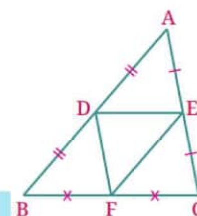
④ فى الشكل المقابل :
ما قيمة x ؟
(أ) 16 (ب) 8
(جـ) 4 (د) 2



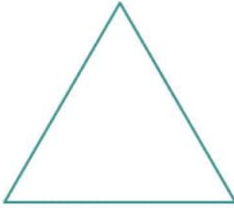
⑤ فى الشكل المقابل :
ما قيمة x ؟
(أ) 9 (ب) 4.5
(جـ) 13.5 (د) 2.25

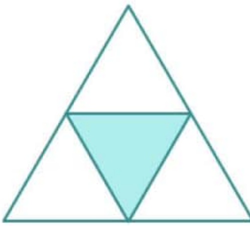


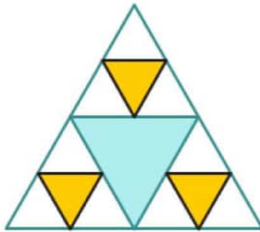
⑥ فى الشكل المقابل :
إذا كان محيط ΔABC يساوى 18 سم
فما محيط ΔDEF ؟
(أ) 6 سم (ب) 12 سم
(جـ) 36 سم (د) 9 سم



④ أجب عن السؤال التالي :


شكل (1)

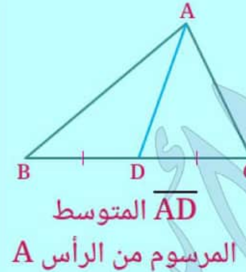

شكل (2)


شكل (3)

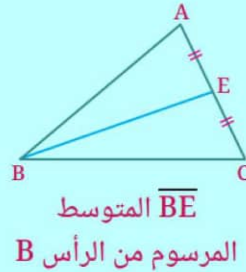
شكل (1) يمثل مثلثًا محيطه 8 سم،
وتم تلوين المثلث الناتج من القطع المتوسطة
الثلاث كما بشكل (2) ، ثم تكرار ذلك على
المثلثات غير الملونة للحصول على شكل (3)
احسب مجموع محيطات المثلثات الملونة فى شكل (3).

متوسطات المثلث

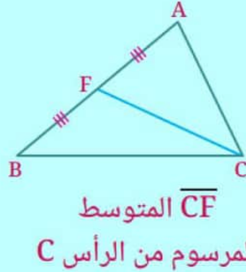
متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. كل مثلث له ثلاثة متوسطات كالتالى :



المتوسط $\overline{AD}$
المرسوم من الرأس A



المتوسط $\overline{BE}$
المرسوم من الرأس B



المتوسط $\overline{CF}$
المرسوم من الرأس C

نظرية 4-1

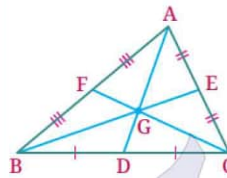
متوسطات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ متوسطات المثلث ABC

فإن : $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

أى أن : النقطة G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC



ملاحظة

إذا تقاطع متوسطان لمثلث فى نقطة، فإن هذه النقطة هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث وتسمى بالمركز الهندسى للمثلث أو نقطة الاتزان.

نظرية 4-2

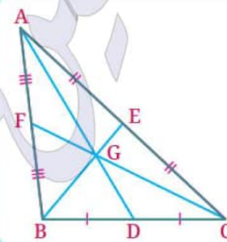
نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة **2 : 1 من جهة الرأس.** **1 : 2 من جهة القاعدة.**

فى الشكل المقابل :

إذا كانت G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

فإن :

$GD = \frac{1}{3} AD$, $AG = \frac{2}{3} AD$, $AG = 2\ GD$



$AD = 3\ GD$, $GD = \frac{1}{2} AG$

نتيجة :

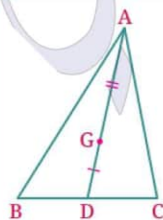
النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة **1 : 2** من جهة الرأس هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC

وكانت $G \in \overline{AD}$ بحيث $AG = 2\ GD$

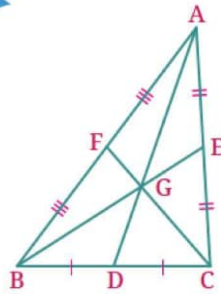
فإن G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC





فى الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC



وكان : AG = 8 سم ، GE = 3.5 سم ، CF = 7.5 سم

أوجد طول كل من $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CG}$



- $AD = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \times 8 = 12$
- $BE = 3\ GE = 3 \times 3.5 = 10.5$
- $CG = \frac{2}{3} CF = \frac{2}{3} \times 7.5 = 5$

أى أن : طول $\overline{AD} = 12$ سم

، طول $\overline{BE} = 10.5$ سم

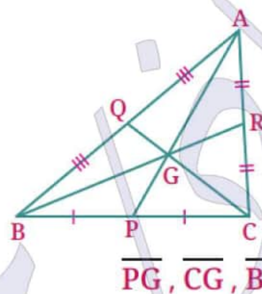
، طول $\overline{CG} = 5$ سم



تدريب

فى الشكل التالى :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان AP = 21 سم ، GQ = 5 سم، BG = 16 سم.



أوجد طول كل من : $\overline{PG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BR}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

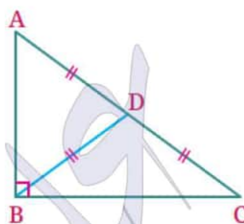
نظرية 3-4

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا مرسومًا من رأس القائمة B

فإن : $BD = AD = DC = \frac{1}{2} AC$



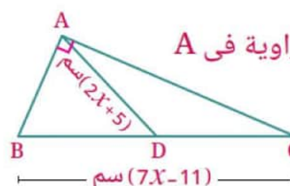


فى الشكل المقابل :

المثلث ABC قائم الزاوية فى A

، $\overline{AD}$ متوسط فيه.

أوجد طول $\overline{AD}$





$\because \overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC وخارج من رأس القائمة

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC \quad \therefore 2X + 5 = \frac{1}{2}(7X - 11)$

$\therefore 2X + 5 = 3.5X - 5.5 \quad \therefore 1.5X = 10.5 \quad \therefore X = 7$

$\therefore AD = 2X + 5 = 2 \times 7 + 5 = 19$

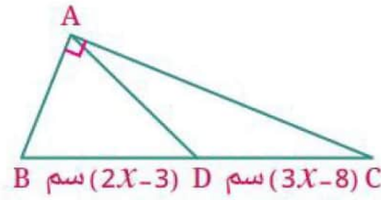
أى أن طول $\overline{AD}$ يساوى 19 سم.

تدريب

فى الشكل التالى :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث

ABC القائم الزاوية فى A



أوجد طول $\overline{AD}$

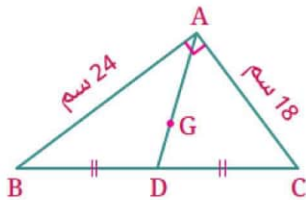
....

مثال

فى الشكل المقابل :

إذا كانت G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

القائم الزاوية فى A ، أوجد طول $\overline{AG}$





∵ المثلث ABC قائم الزاوية فى A

$\therefore (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ (نظرية فيثاغورس)

$= (24)^2 + (18)^2 = 900$

$\therefore BC = \sqrt{900} = 30$

∵ $\overline{AD}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 30 = 15$

∵ G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

$\therefore AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 15 = 10$

أى أن طول $\overline{AG}$ يساوى 10 سم

تدريب

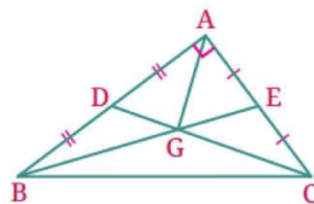
فى الشكل التالى :

إذا كانت D , E منتصفى

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على الترتيب ،

$\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{G\}$

AC = 9 سم ، AG = 5 سم



أوجد طول $\overline{AB}$

....

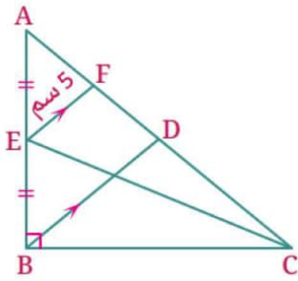


فى الشكل المقابل :

إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية فى B

$\overline{CE}$, $\overline{BD}$ متوسطين فيه ، $\overline{EF} // \overline{BD}$ ، EF = 5 سم

أوجد طول $\overline{AC}$





فى المثلث ABD :

∵ E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{EF} // \overline{BD}$ ∴ F منتصف $\overline{AD}$

$\therefore EF = \frac{1}{2} BD$ $\therefore BD = 2 \times 5 = 10$

∵ $\overline{BD}$ متوسط فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B

$\therefore BD = \frac{1}{2} AC$ $\therefore AC = 2 \times 10 = 20$

أى أن طول $\overline{AC}$ يساوى 20 سم.



تدريب

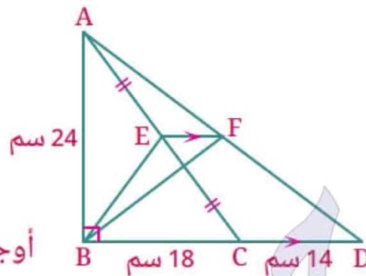
فى الشكل التالى :

إذا كانت $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ ، $C \in \overline{BD}$

E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{EF} // \overline{CD}$

AB = 24 سم ، BC = 18 سم

CD = 14 سم



أوجد محيط المثلث BEF

....

....

....

....

....

عكس نظرية (3 – 4)

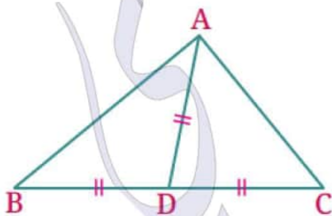
إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس ، فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا مرسومًا من الرأس A ،

وكان : $AD = BD = CD = \frac{1}{2} BC$

فإن : $m(\angle BAC) = 90°$



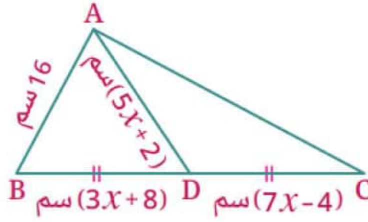


فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا فى المثلث ABC

فأثبت أن : $m(\angle BAC) = 90^\circ$

ثم أوجد مساحة المثلث ABC





$\because BD = CD \qquad \therefore 7X - 4 = 3X + 8$

$\therefore 7X - 3X = 8 + 4 \qquad \therefore 4X = 12 \qquad \therefore X = 3$

$\therefore BD = 3 \times 3 + 8 = 17$

$DC = 7 \times 3 - 4 = 17$

$AD = 5 \times 3 + 2 = 17$

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC \qquad \therefore m(\angle BAC) = 90^\circ$

من نظرية فيثاغورس تجد أن :

$(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2 = (34)^2 - (16)^2 = 900$

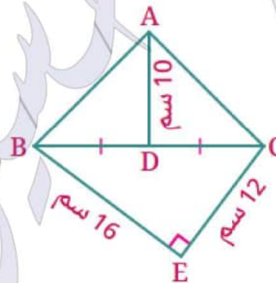
$\therefore AC = \sqrt{900} = 30$

$\therefore$ مساحة المثلث $ABC = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 16 \times 30 = 240$ سم^2.



تدريب

فى الشكل التالى :



إذا كانت D منتصف $\overline{BC}$

أثبت أن : $m(\angle BAC) = 90^\circ$

....

....

....

....

....

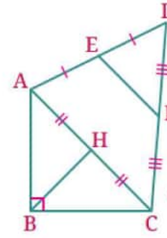
الواجب

① أجب عن الأسئلة التالية:

① في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{BH}$ متوسطًا في المثلث ABC القائم الزاوية في B ، F , E منتصفي $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ على الترتيب

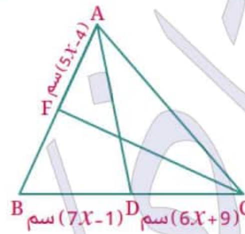
أثبت أن : BH = EF



② في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ متوسطين في المثلث ABC

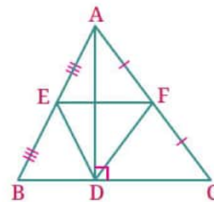
أوجد طول $\overline{FB}$



③ في الشكل المقابل :

ABC مثلث فيه $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، F , E منتصفي $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على الترتيب.

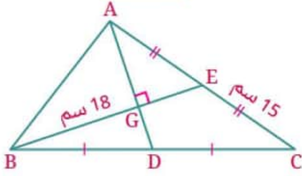
أثبت أن : محيط المثلث EFD = $\frac{1}{2}$ محيط المثلث ABC



④ في الشكل المقابل :

إذا كانت E منتصف $\overline{AC}$ ، D منتصف $\overline{BC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BE}$ ، CE = 15 سم ، BG = 18 سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{AD}$

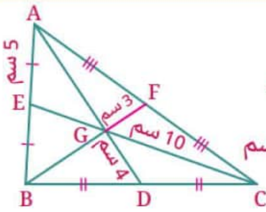


⑤ في الشكل المقابل :

G نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، AE = 5 سم

CG = 10 سم

GD = 4 سم ، GF = 3 سم

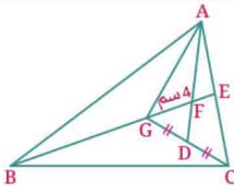


⑥ في الشكل المقابل :

G نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، DC = DG ،

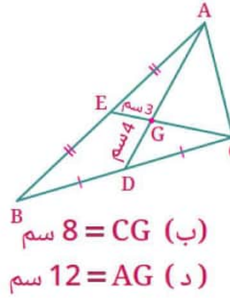
GF = 4 سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{BE}$



③ اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

① **فى الشكل المقابل :**



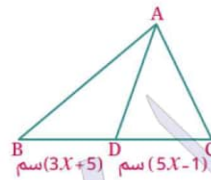
إذا كانت G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، $GE = 3$ سم ، $GD = 4$ سم فأى مما يلى صحيح ؟

(أ) $AG = 6$ سم (ب) $CG = 8$ سم

(جـ) $CE = 9$ سم (د) $AG = 12$ سم

---

② **فى الشكل المقابل :**



$\overline{AD}$ متوسط فى المثلث ABC

ما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 3 سم

(ب) 6 سم

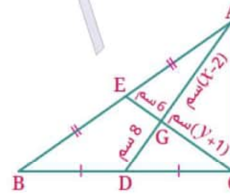
(جـ) 14 سم

(د) 28 سم

---

③ **فى الشكل المقابل :**

$x - y =$ ....



(أ) 0

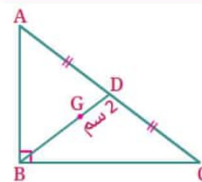
(ب) 7

(جـ) 14

(د) 29

---

④ **فى الشكل المقابل :**



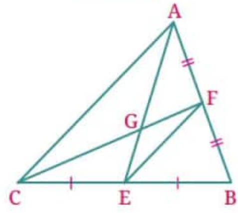
إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC القائم الزاوية فى B ، $GD = 2$ سم، فما طول $\overline{AC}$ ؟

(أ) 8 سم (ب) 12 سم

(جـ) 18 سم (د) 24 سم

---

⑤ **فى الشكل المقابل :**



$\overline{AE}$, $\overline{CF}$ متوسطان فى المثلث ABC ، $\overline{AE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

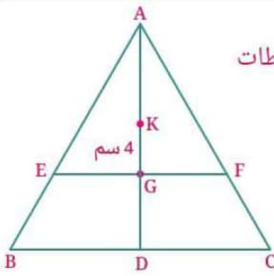
$CG = 12$ سم ، $AE = 15$ سم ، $AC = 20$ سم ، فما محيط المثلث GEF ؟

(أ) 18 سم (ب) 21 سم

(جـ) 24 سم (د) 27 سم

---

⑥ **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، K نقطة تلاقى متوسطات المثلث AEF

فما طول $\overline{GD}$ ؟

(أ) 2 سم (ب) 4 سم

(جـ) 6 سم (د) 8 سم

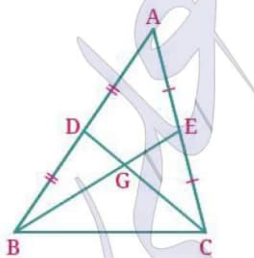
---

④ أجب عن السؤال التالي :

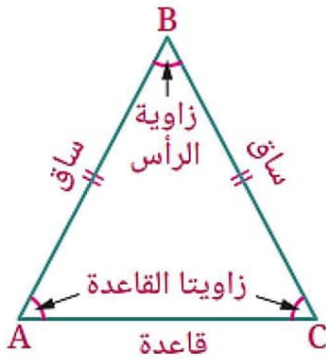
فى الشكل المقابل :

إذا كان $BE = 15$ سم ، $CD = 9$ سم

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول $\overline{BC}$



المثلث المتساوي الساقين



المثلث المتساوى الساقين هو مثلث يحتوى على ضلعين متطابقين.

- يُسمى الضلعان المتطابقان ساقى المثلث.
- تُسمى الزاوية المحصورة بينهما زاوية الرأس.
- تُسمى الزاويتان الأخريان زاويتى القاعدة.

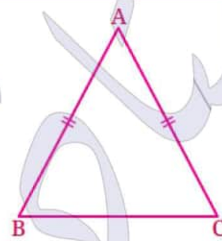
نظرية 5-1 نظرية المثلث المتساوى الساقين

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.

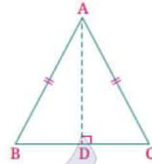
فى المثلث ABC :

إذا كانت : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

فإن : $\angle B \cong \angle C$



نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، ومن تطابق المثلثين ABD ، ACD يمكن إثبات أن : $\angle B \cong \angle C$



عكس نظرية (1 - 5)

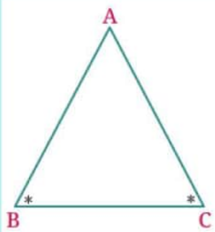
عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.

فى المثلث ABC :

إذا كانت : $\angle B \cong \angle C$

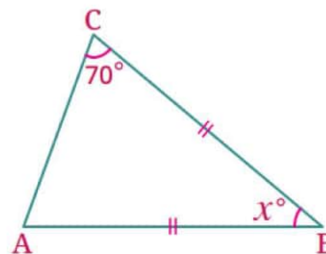
فإن : $\overline{AC} \cong \overline{AB}$



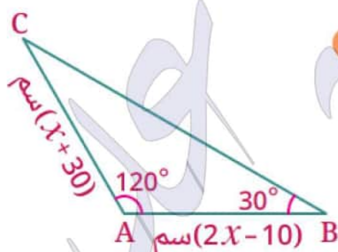


أوجد قيمة x فى كل من الشكلين الآتيين :

1



2



الحل

(1)

$\because \overline{AB} \cong \overline{CB} \quad \therefore \angle A \cong \angle C$

$\therefore m(\angle A) = m(\angle C) = 70°$

$\therefore m(\angle B) = 180° - (70° + 70°)$

$= 40°$

$\therefore x = 40$

(2)

$\because m(\angle C) = 180° - (120° + 30°)$

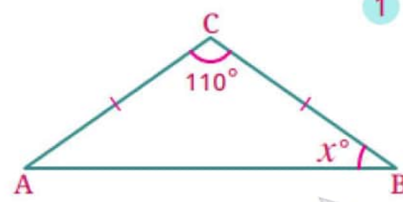
$= 30°$

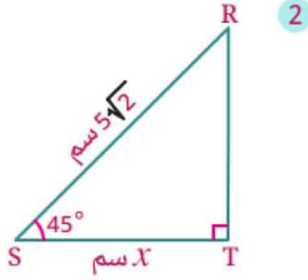
$\therefore \angle C \cong \angle B \quad \therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\therefore 2x - 10 = x + 30$

$\therefore 2x - x = 30 + 10 \quad \therefore x = 40$

تدريب أوجد قيمة x فى كل من الشكلين الآتيين :

1


2


....
....
....
....

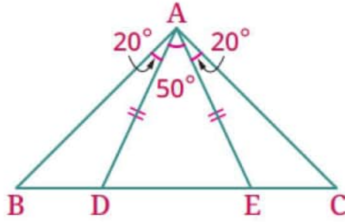
....
....
....
....



فى الشكل المقابل :

$E \in \overline{BC}$ ، $D \in \overline{BC}$

أثبت أن المثلث ABC متساوى الساقين.





فى المثلث ADE :

$\because \overline{AD} \cong \overline{AE}$

$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle AED) = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$

$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC) = 180° - 65° = 115°$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle C) = 180° - (20° + 115°) = 45°$

$\therefore \angle B \cong \angle C \qquad \therefore \overline{AB} \cong \overline{AC}$

∴ المثلث ABC متساوى الساقين.

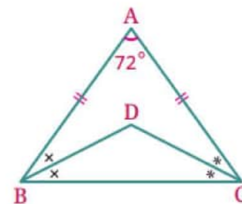
تدريب فى الشكل التالى : $AB = AC$, $m(\angle A) = 72°$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

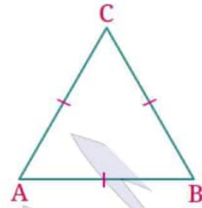
أثبت أن :

المثلث DBC متساوى الساقين.



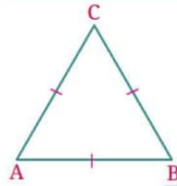
....
....
....
....
....
....
....
....
....

المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.



نتيجة :

المثلث المتساوى الأضلاع زواياه الثلاث متطابقة.



فى المثلث ABC :

إذا كان :

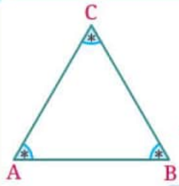
$AB = AC = BC$

فإن :

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

نتيجة :

المثلث الذى زواياه الثلاث متطابقة أضلاعه متساوية فى الطول.



فى المثلث ABC :

إذا كانت :

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

فإن :

$AB = AC = BC$

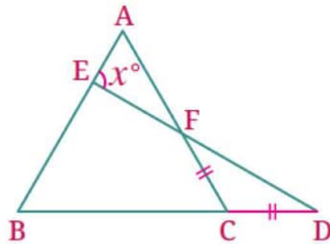


فى الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوى الأضلاع.

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$, $CF = CD$

أوجد قيمة x





$\because$ Δ ABC متساوى الأضلاع.

$\therefore m(\angle ACB) = m(\angle A) = m(\angle B) = 60°$

$\therefore m(\angle FCD) = 180° - 60° = 120°$

$\because$ Δ FCD متساوى الساقين فيه : $CF = CD$

$\therefore m(\angle D) = m(\angle CFD) = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$

$\because$ $\angle$ AED خارجة عن المثلث EBD

$\therefore m(\angle AED) = m(\angle B) + m(\angle D) = 60° + 30° = 90°$

$\therefore x = 90$



تدريب

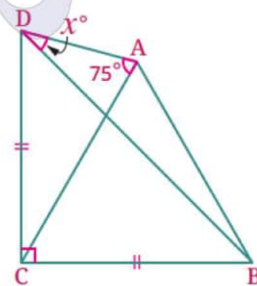
فى الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوى الأضلاع

$BC = CD$

$m(\angle DAC) = 75°$

$m(\angle DCB) = 90°$



أوجد مع البرهان قيمة x.

....

....

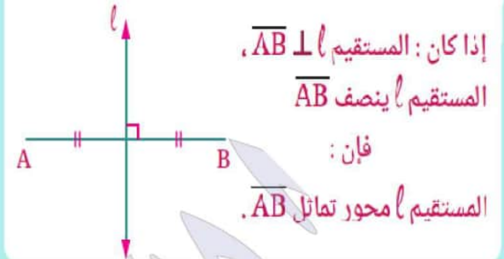
....

....

محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من نقطة منتصفها.

إذا كان : المستقيم $\ell \perp \overline{AB}$ ، المستقيم ℓ ينصف $\overline{AB}$

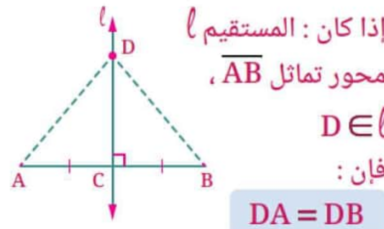
فإن : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$.



نتيجة : النقطة التى تنتمى إلى محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

إذا كان : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$ ، $D \in \ell$

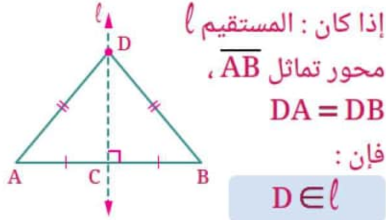
فإن : $DA = DB$



نتيجة : النقطة التى على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة تقع على محور تماثل هذه القطعة المستقيمة.

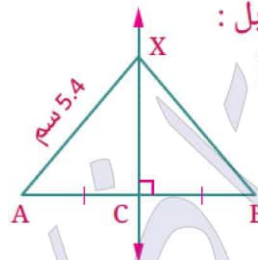
إذا كان : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$ ، $DA = DB$

فإن : $D \in \ell$

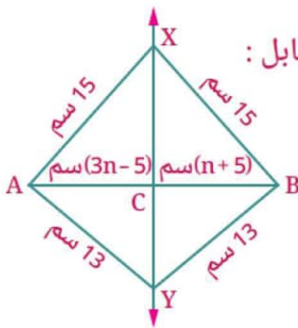




1 فى الشكل المقابل : أوجد طول $\overline{XB}$



2 فى الشكل المقابل : أوجد قيمة n





1

$\because CA = CB$ ، $\overleftrightarrow{XC} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XC}$ محور تماثل $\overline{AB}$

$\because X \in \overleftrightarrow{XC}$

$\therefore XB = XA = 5.4$

$\therefore$ طول $\overline{XB} = 5.4$ سم

2

$\because XA = XB = 15$

$\therefore X$ تقع على محور تماثل $\overline{AB}$

$\because YA = YB = 13$

$\therefore Y$ تقع على محور تماثل $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XY}$ محور تماثل $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{AB}$ ، $AC = CB$

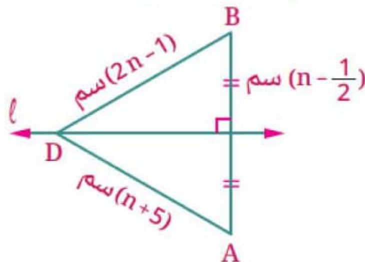
$\therefore 3n - 5 = n + 5$

$\therefore 3n - n = 10 \quad \therefore 2n = 10$

$\therefore n = \frac{10}{2} = 5$

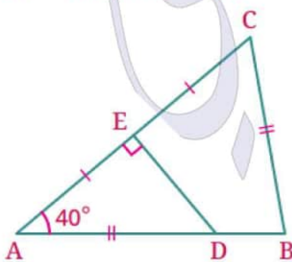
تدريب

1 فى الشكل التالى :



أوجد : $m(\angle A)$

2 فى الشكل التالى : $AE = EC$, $AD = CB$



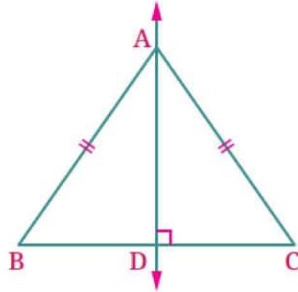
أوجد : $m(\angle C)$

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو مستقيم يمر برأس المثلث وعمودى على قاعدته.

إذا كان : $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$, $AB = AC$

فإن : $\overleftrightarrow{AD}$ محور تماثل المثلث ABC



نتيجة :

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.

إذا كان :

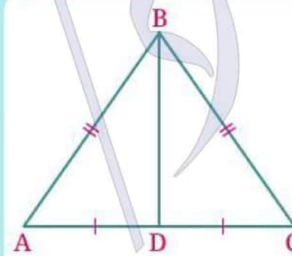
$AB = CB$

$\overline{BD}$ متوسط

فإن :

① $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

② $m(\angle ABD) = m(\angle CBD)$



نتيجة :

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.

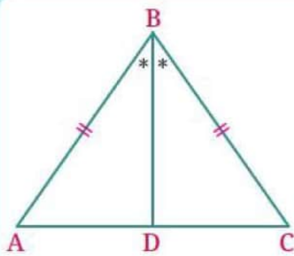
إذا كان :

$AB = CB$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ فإن :

① $AD = CD$

② $\overline{BD} \perp \overline{AC}$



نتيجة :

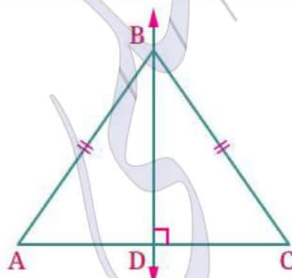
المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلًا من القاعدة وزاوية الرأس.

إذا كان :

$\overleftrightarrow{BD} \perp \overline{AC}$, $AB = CB$

فإن :

① $AD = DC$ ② $m(\angle ABD) = m(\angle CBD)$



ملاحظة هامة

0	عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع هو 0
1	عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو 1
3	عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع هو 3

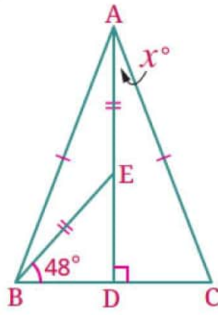


فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, EA = EB , AB = AC

m (∠ EBD) = 48°

أوجد قيمة X





فى المثلث EDB :

m (∠ DEB) = 180° – (90° + 48°) = 42°

∵ ∠ DEB خارجة عن المثلث AEB , EA = EB

∴ m (∠ EAB) = m (∠ EBA) = $\frac{42°}{2}$ = 21°

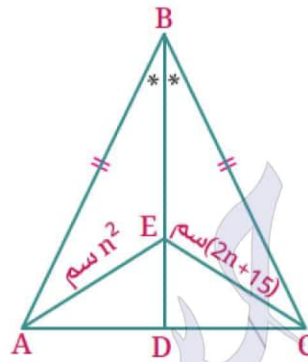
∵ المثلث ABC متساوى الساقين ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

∴ m (∠ CAD) = m (∠ BAD) = 21° ∴ X = 21



تدريب

فى الشكل التالى : E ∈ $\overline{BD}$



أوجد قيمة n

....

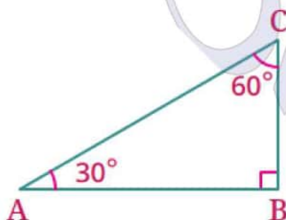
....

....

....

المثلث الثلاثيني ستيني

المثلث الثلاثينى الستينى هو مثلث قائم الزاوية زاويتاه الحادتان قياساهما 30° ، 60° .



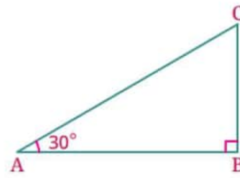
نتيجة :

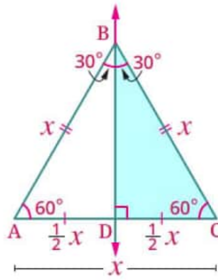
فى المثلث الثلاثينى الستينى طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها $30°$ يساوى نصف طول الوتر.

إذا كان :

ΔABC قائم الزاوية فى B ، $m(\angle A) = 30°$

فإن : $BC = \frac{1}{2} AC$





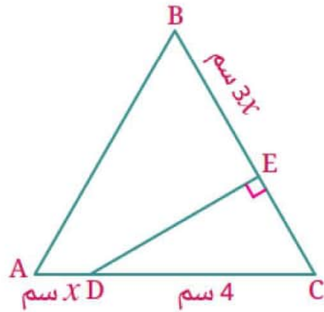
محور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين، وكل منهما مثلث ثلاثينى ستينى.



فى الشكل المقابل :

إذا كان ΔABC متساوى الأضلاع

فأوجد قيمة x





$\because$ ΔABC متساوى الأضلاع

$\therefore m(\angle C) = 60°$

$\because m(\angle DEC) = 90°$ $\therefore m(\angle EDC) = 30°$

$\therefore$ المثلث DEC ثلاثينى ستينى

$\therefore EC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$\because BC = AC$ $\therefore 3x + 2 = x + 4$ $\therefore 3x - x = 4 - 2$

$\therefore 2x = 2$ $\therefore x = 1$

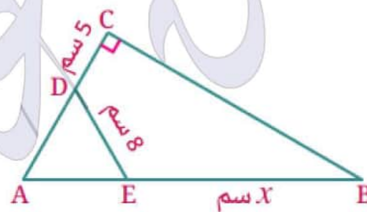


تدريب

فى الشكل التالى :

المثلث ADE متساوى الأضلاع.

أوجد قيمة x



....

....

....

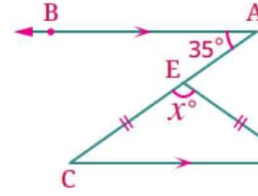
....

....

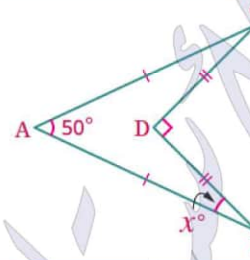
الواجب

① أوجد قيمة X في كل مما يأتي:

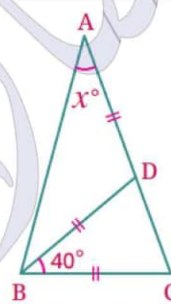
①



②



③

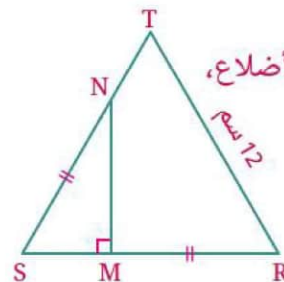


② أجب عن الأسئلة التالية:

① فى الشكل المقابل :

المثلث SRT متساوى الأضلاع،

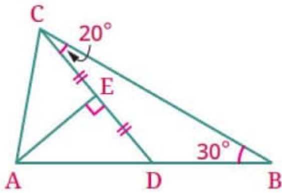
وطول ضلعه 12 سم



$MR = SN$ ، $\overline{NM} \perp \overline{SR}$

أوجد مع البرهان طول $\overline{NM}$

② فى الشكل المقابل :



$m(\angle B) = 30°$, $m(\angle DCB) = 20°$

$CE = DE$, $\overline{AE} \perp \overline{CD}$

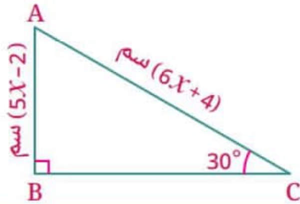
أوجد مع البرهان : $m(\angle CAE)$

③ فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{AC}$ ،

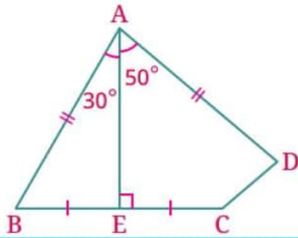
ثم أوجد مساحة

المثلث ABC



④ فى الشكل المقابل :

أوجد $m(\angle D)$



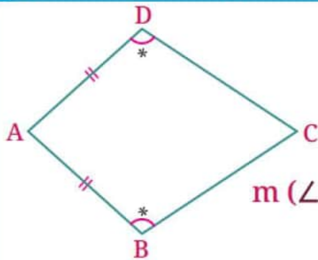
⑥ فى الشكل المقابل :

ABCD شكل رباعى

فيه $AB = AD$

$m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$

برهن أن : $BC = DC$



⑦ :

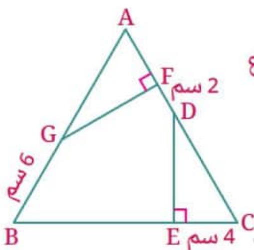
المثلث ABC متساوى الأضلاع

$EC = 4$ سم ، $FD = 2$ سم،

$GB = 6$ سم

أوجد مع البرهان

محيط ΔABC



⑧ :

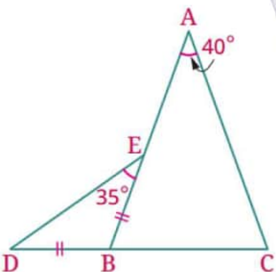
$D \in \overrightarrow{CB}$

، $m(\angle DEB) = 35°$

$m(\angle A) = 40°$

$BE = BD$

أثبت أن : $AB = AC$



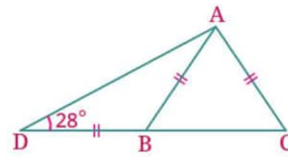
⑨ :

$B \in \overline{DC}$

$m(\angle D) = 28°$

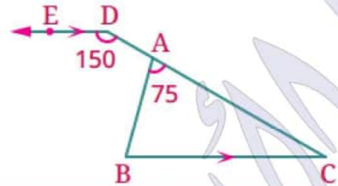
أوجد مع البرهان

$m(\angle CAD)$

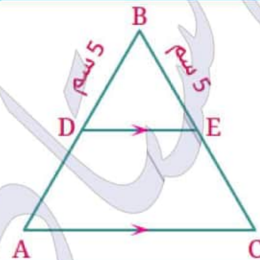


③ في كل من الأشكال التالية أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين:

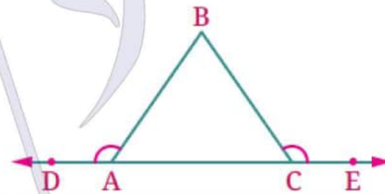
①



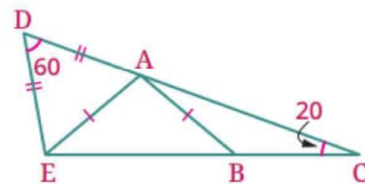
②



③



④



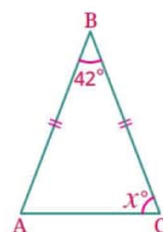
اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

① فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(أ) 42 (ب) 21

(جـ) 69 (د) 84

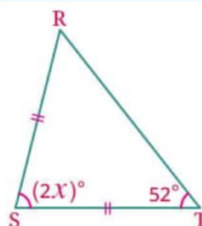


② فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(أ) 26 (ب) 52

(جـ) 76 (د) 38

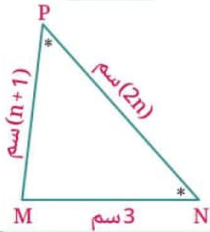


③ فى الشكل المقابل :

ما طول $\overline{PN}$ ؟

(أ) 8 سم (ب) 3 سم

(جـ) 6 سم (د) 4 سم

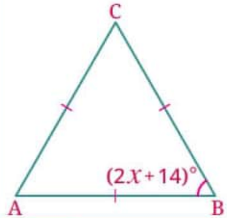


④ فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(أ) 46 (ب) 23

(جـ) 60 (د) 37



⑤ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين 3 سم ، 7 سم، فما طول الضلع الثالث؟

(أ) 3 سم (ب) 4 سم

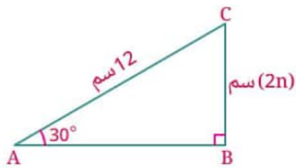
(جـ) 7 سم (د) 10 سم

⑥ فى الشكل المقابل :

ما قيمة n ؟

(أ) 3 (ب) 6

(جـ) 9 (د) 12

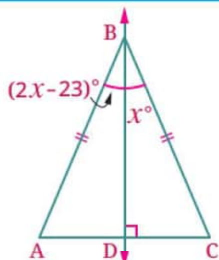


⑦ فى الشكل المقابل :

ما قياس $\angle C$ ؟

(أ) 23° (ب) 46°

(جـ) 67° (د) 60°

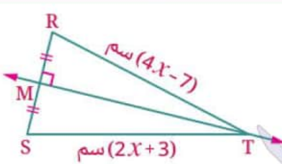


⑧ فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟

(أ) 7 (ب) 10

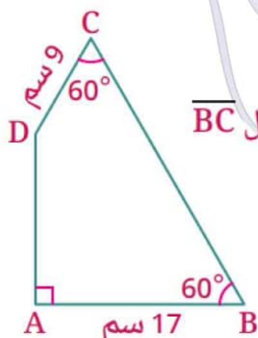
(جـ) 5 (د) 3



④ أجب عن السؤال التالي

فى الشكل المقابل :

أوجد مع البرهان طول $\overline{BC}$



الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات

تذكر

المضلع: المضلع هو شكل مستوٍ مغلق يتكون من اتحاد ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر حيث :
- القطع المستقيمة تسمى أضلاع المضلع.
- تتقاطع القطع المستقيمة عند الأطراف فقط فى نقط تسمى رؤوس المضلع.









المضلع المحدب :
لا يحتوى على أى زاوية داخلة منعكسة.



المضلع المقعر :
يحتوى على زاوية واحدة منعكسة على الأقل من زواياه الداخلة.

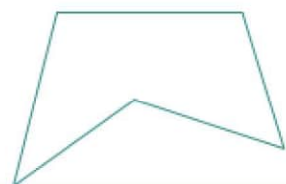
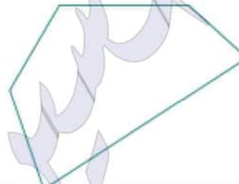


كل من الأشكال التالية لا تمثل مضلعًا.






أى من المضلعات الآتية محدب وأيها مقعر؟

① 
② 
③ 

....

الصيغة الرياضية لمجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب = $(n-2) \times 180°$
حيث n عدد أضلاع المضلع.

فمثلًا :
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الخماسى المحدب = $(5-2) \times 180° = 540°$
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الثمانى المحدب = $(8-2) \times 180° = 1080°$



المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلة
	n	$n - 2$	$(n-2)\times 180$
الرباعى	4	2	$2 \times 180° = 360°$
الخماسى	5	3	$3 \times 180° = 540°$
السداسى	6	4	$4 \times 180° = 720°$
السباعى	7	5	$5 \times 180° = 900°$
:	:	:	:
ذى عشرة أضلاع	10	8	$8 \times 180° = 1440°$



فى كل مما يأتى، أوجد عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة :



① $720°$

$(n-2)\times 180° = 720°$

$\therefore n - 2 = \frac{720°}{180°} = 4$

$\therefore n = 4 + 2 = 6$

∴ عدد الأضلاع = 6 أضلاع

② $1440°$

$(n-2)\times 180° = 1440°$

$\therefore n - 2 = \frac{1440°}{180°} = 8$

$\therefore n = 8 + 2 = 10$

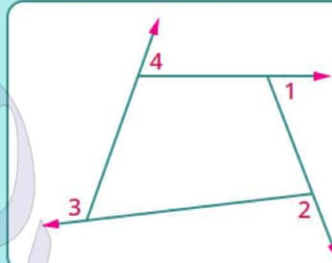
∴ عدد الأضلاع = 10 أضلاع

قاعدة

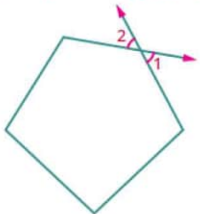
مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب (زاوية واحدة عند كل رأس) يساوى $360°$

فى الشكل المقابل :

$m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) + m(\angle 4) = 360°$



لأى مضلع محدب توجد زاويتان خارجتان عند كل رأس من رؤوسه كما بالشكل.

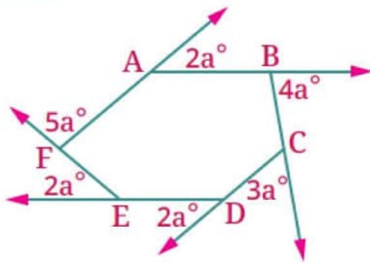


هاتان الزاويتان متقابلتان بالرأس، لذلك فهما متساويتان فى القياس.



في الشكل المقابل :

أوجد : (1) قيمة a (2) $m(\angle BCD)$





∵ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب = 360°

$\therefore 2a° + 4a° + 3a° + 2a° + 2a° + 5a° = 360°$

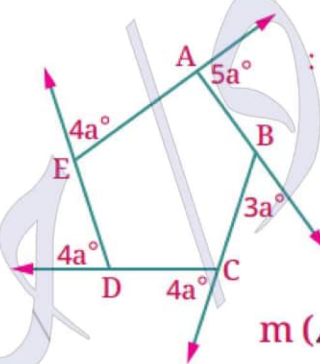
$\therefore 18a = 360$ $\therefore a = \frac{360}{18} = 20$ (المطلوب (1))

∴ قياس الزاوية الخارجة عند الرأس C = 3 × 20° = 60°

$\therefore m(\angle BCD) = 180° - 60° = 120°$ (المطلوب (2))

تدريب

في الشكل التالي :



أوجد : $m(\angle BCD)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تذكر

المضلع المنتظم هو مضلع تتحقق فيه الخاصيتان التاليتان :

(1) جميع أضلاعه متساوية في الطول. (2) جميع زواياه الداخلة متساوية في القياس.

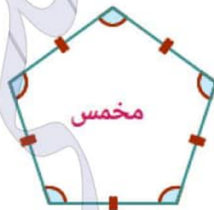
أمثلة للمضلع المنتظم :



ثلاثي منتظم



رباعي منتظم



خماسي منتظم



سداسي منتظم

ملاحظة :

قياس كل زاوية داخلة من زوايا المضلع المنتظم = $\frac{\text{مجموع قياسات زواياه الداخلة}}{\text{عدد هذه الزوايا}}$

الصيغة الرياضية لقياس زاوية المضلع المنتظم

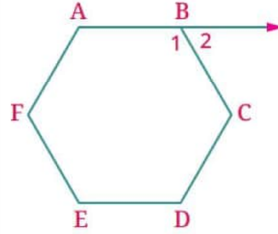
فى المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه n ضلعًا يكون :

• قياس الزاوية الداخلة = $\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$

• قياس الزاوية الخارجة عند أحد رؤوسه = $\frac{360^\circ}{n}$



الشكل المقابل سداسى منتظم.



$\bullet\ m(\angle 1) = \frac{(n-2)\times 180^\circ}{n} = \frac{(6-2)\times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

$\bullet\ m(\angle 2) = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



1 قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه 9 يساوى 140°

2 قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الخماسى المنتظم عند أحد رؤوسه = 72°



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم فى كل مما يأتى :

1 إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة = 150°

2 إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة = 24°



∵ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الداخلة = 150°

$\therefore \frac{(n-2)\times 180^\circ}{n} = 150^\circ$

$\therefore 180^\circ n - 360^\circ = 150^\circ n$

$\therefore 180^\circ n - 150^\circ n = 360^\circ$

$\therefore 30^\circ n = 360^\circ$ $\therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$

∴ عدد أضلاع المضلع = 12 ضلعًا.

∵ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الخارجة = 24°

$\therefore \frac{360^\circ}{n} = 24^\circ$

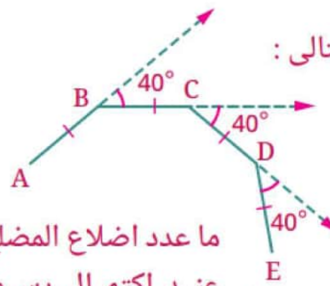
$\therefore 24^\circ n = 360^\circ$

$\therefore n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15$

∴ عدد أضلاع المضلع = 15 ضلعًا.

تدريب

فى الشكل التالى :



ما عدد اضلاع المضلع المنتظم عند اكتمال رسمه بنفس النمط ؟

....
....
....
....
....
....
....
....
....

الصيغة الرياضية لعدد أقطار المضلع المحدب

عدد أقطار المضلع المحدب الذى عدد أضلاعه n ضلعًا يساوى $\frac{n\,(n-3)}{2}$



أوجد عدد أقطار المضلع الثمانى المحدب.



عدد أقطار المضلع الثمانى المحدب $= \frac{n\,(n-3)}{2} = \frac{8\,(8-3)}{2} = 20$ قطرًا.



أوجد عدد أضلاع مضلع محدب عدد أقطاره 35 قطرًا.



$\because$ عدد الأقطار = 35

$\therefore \frac{n\,(n-3)}{2} = 35$ $\quad \therefore n\,(n-3) = 70$

$\therefore n^2 - 3\,n - 70 = 0$

$\therefore (n+7)\,(n-10) = 0$

$\therefore$ إما $n + 7 = 0$ ومنها $n = -7$ (مرفوض)

أو $n - 10 = 0$ ومنها $\boxed{n = 10}$

$\therefore$ عدد الأضلاع = 10 أضلاع.



تدريب أوجد كلًا مما يأتى :

1. عدد أقطار المضلع الخماسى المحدب.

....

2. عدد أضلاع مضلع محدب له 27 قطرًا.

....

....

....

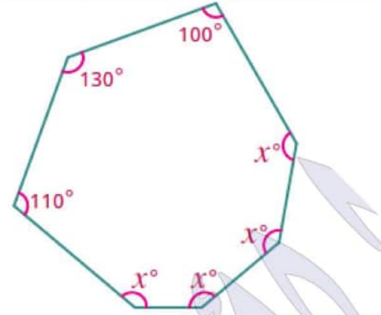
....

....

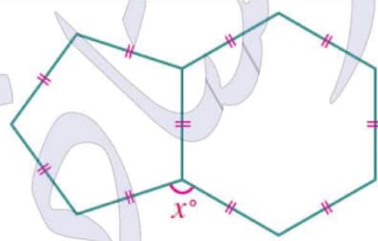
الواجب

① أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

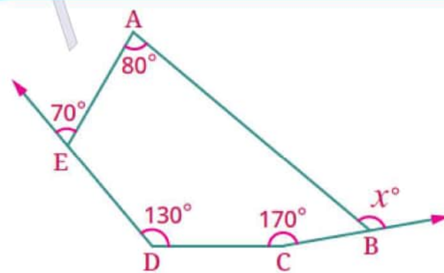
①



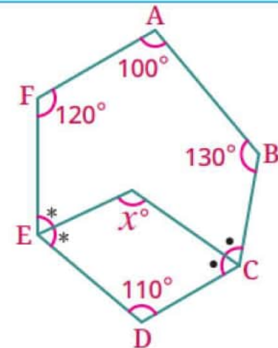
②



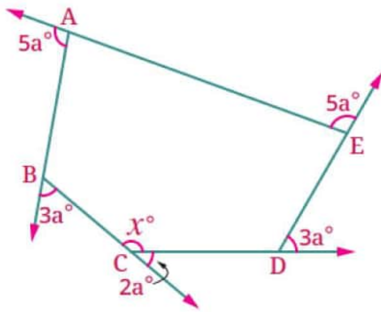
③



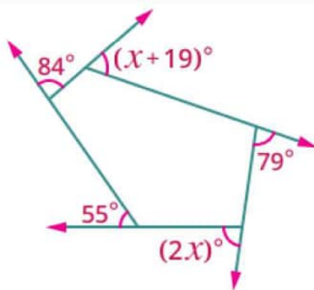
④



⑤



⑥



② أوجد كل من:

① عدد أضلاع مضلع محدب مجموع قياسات زواياه الداخلة 2700°، وكذلك عدد أقطاره.

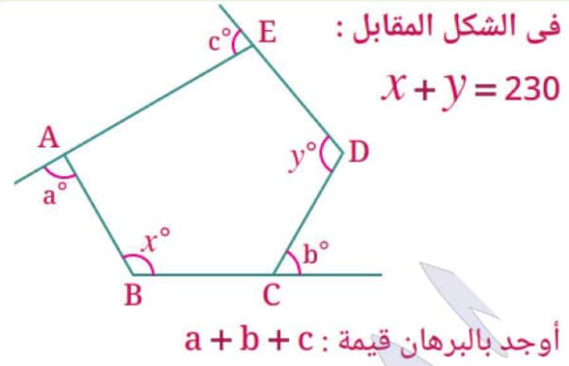
② عدد أضلاع المضلع المحدب الذى له 9 أقطار.

③ عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس زاويته الداخلة 156°، وكذلك عدد أقطاره.

③

فى الشكل المقابل :

$x + y = 230$



أوجد بالبرهان قيمة : $a + b + c$

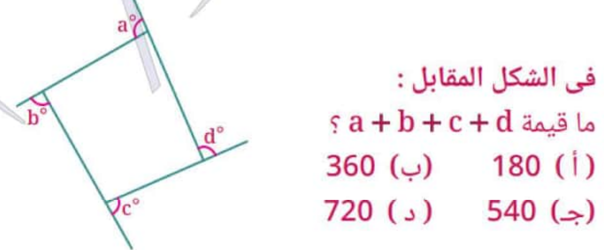
④ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① ما مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسى المحدب ؟

(أ) 900°   (ب) 720°

(جـ) 540°   (د) 360°

②



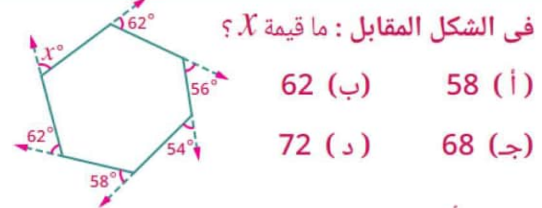
فى الشكل المقابل :

ما قيمة $a + b + c + d$ ؟

(أ) 180   (ب) 360

(جـ) 540   (د) 720

③ فى الشكل المقابل : ما قيمة x ؟



(أ) 58   (ب) 62

(جـ) 68   (د) 72

④ ما قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم ذى 18 ضلعًا ؟

(أ) 135°   (ب) 144°

(جـ) 150°   (د) 160°

⑤ ما عدد اضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة 2340° ؟

(أ) 12   (ب) 13   (جـ) 14   (د) 15

⑥ ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة 144° ؟

(أ) 10   (ب) 11   (جـ) 12   (د) 14

⑦ ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الخارجة 20° ؟

(أ) 12   (ب) 14   (جـ) 16   (د) 18

⑧ ما عدد أقطار المضلع السباعى المحدب ؟

(أ) 7   (ب) 11   (جـ) 13   (د) 14

⑤

إذا زاد عدد أضلاع مضلع منتظم ضلعين آخرين،
فإن قياس الزاوية الخارجة يقل بمقدار 9°.
كم عدد أضلاع المضلع ؟

ثالثاً

الإحصاء

الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيا

إذا كانت كمية البيانات كبيرة فيتم تنظيمها في مجموعات أو فترات متساوية ومنها نكون الجدول التكراري ذي المجموعات والذي يتم تمثيله بالمدرج التكراري

فمثلا

مخطط الساق والأوراق المقابل يوضح درجات طلاب الصف الثانى الإعدادى فى مادة العلوم لعدد 28 طالبًا، فيمكن تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات باستخدام فترات متساوية مثل ... , — 20 , — 10 فيكون الجدول كما يلى :

الدرجات	— 10	— 20	— 30	— 40	— 50
التكرار	2	10	9	5	2

الساق	الأوراق
1	3 8
2	4 4 6 6 7 7 8 8 8 9
3	0 2 4 5 5 5 7 9 9
4	1 4 4 7 8
5	2 5

المفتاح: 0 | 3 تعنى 30 درجة

ملاحظة

عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمي إلى الفترة [30 , 20 [يساوي 10

عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمي إلى الفترة [50 , 40 [يساوي 5

عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمي إلى الفترة [40 , 20 [يساوي 19

عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة تنتمي إلى الفترة [30 , 10 [يساوي 12

عدد الطلاب الذين حصلوا على الدرجة 50 فأكثر 2

عدد الطلاب الذين حصلوا على الدرجة 40 فأكثر 7

عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة أقل من 40 فأكثر 21

عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة أقل من 20 فأكثر 2

تكوين الجدول المتجمع الصاعد

ورسم المنحنى التكراري الصاعد

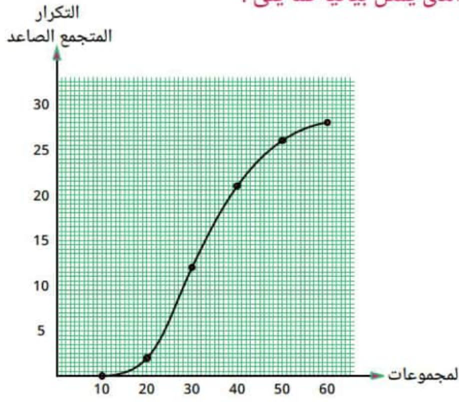
الدرجات	التكرار
10 –	2
20 –	10
30 –	9
40 –	5
50 –	2

2 (أقل من 20)
2 + 10 = 12 (أقل من 30)
12 + 9 = 21 (أقل من 40)
21 + 5 = 26 (أقل من 50)
26 + 2 = 28 (أقل من 60)

اكتب هذه البيانات فى جدول كالتالى، والذى يُمثَّل بيانيًا كما يلى :

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 10	0
أقل من 20	2
أقل من 30	12
أقل من 40	21
أقل من 50	26
أقل من 60	28

«الجدول التكرارى المتجمع الصاعد»



«المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد»

مثال

الجدول التكرارى المقابل يوضح أفضل نتائج حققها 100 سباح فى سباق مسافة 50 مترًا.

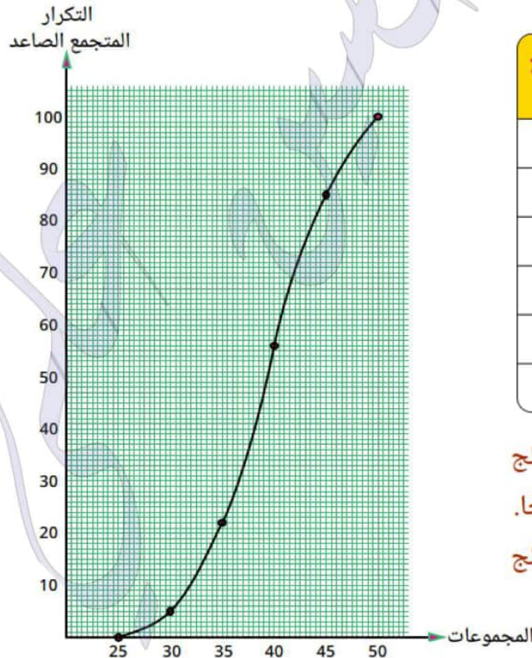
الفترات بالثانية	التكرار
25 –	5
30 –	17
35 –	34
40 –	29
45 –	15

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا ثم أوجد :

1. عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية.
2. عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35 ثانية أو أكثر.
3. النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية.

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 25	0
أقل من 30	5
أقل من 35	22
أقل من 40	56
أقل من 45	85
أقل من 50	100



1. عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية هو : 56 سباحًا.
2. عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35 ثانية أو أكثر هو :
   $100 - 22 = 78$
3. النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية هى :
   $\frac{85}{100} \times 100\% = 85\%$

تمرين

الجدول التالى يوضح كتل 20 صندوقًا بالكيلو جرام.

الفترات (كجم)	التكرار
45 –	2
50 –	3
55 –	3
60 –	6
65 –	4
70 –	2

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا.

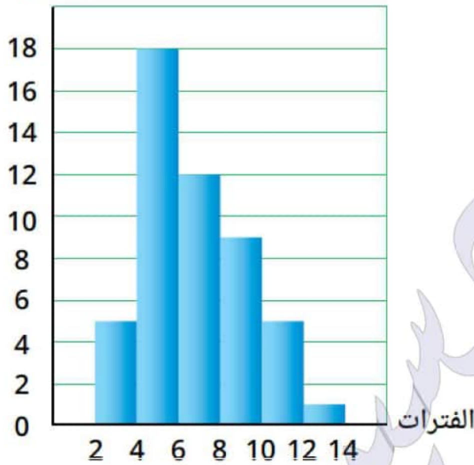
الحدود العليا للمجموعات	التكرار



مثال

إذا كان المدرج التكرارى المقابل يوضح كتل 50 قطعة من أحد المنتجات معروضة للبيع عبر الإنترنت.

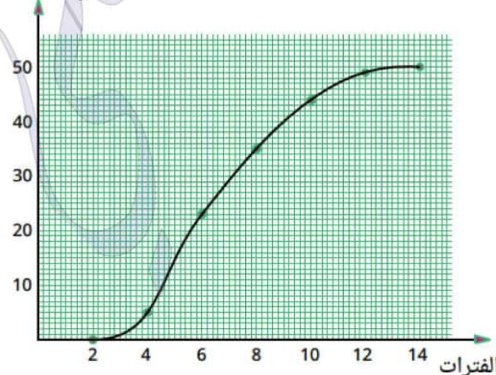
كون الجدول التكرارى ذى المجموعات والجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.



الحل

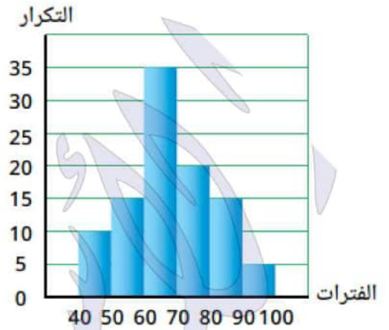
الفترات	2 –	4 –	6 –	8 –	10 –	12 –
التكرار	5	18	12	9	5	1

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 2	0
أقل من 4	5
أقل من 6	23
أقل من 8	35
أقل من 10	44
أقل من 12	49
أقل من 14	50



تمرين

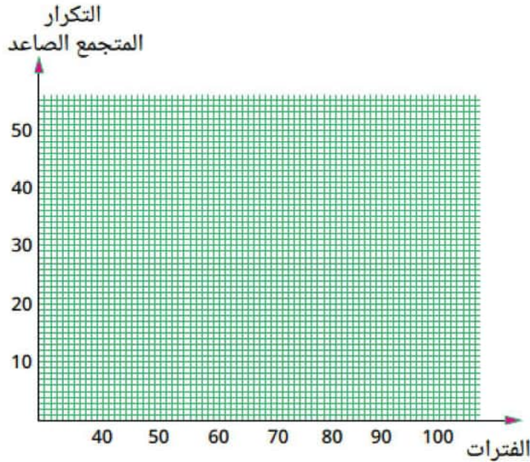
إذا كان المدرج التكرارى التالى يوضح أطوال 100 سمكة تم اصطيادها فى إحدى مسابقات الصيد مقيسة لأقرب سنتيمتر.



كون الجدول التكرارى ذى المجموعات، والجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانيًا.

الفترات						
التكرار						

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد



الواجب

أجب عن الأسئلة التالية:

1 قامت إدارة أحد المصانع بدراسة الزمن المستغرق فى وصول العاملين إلى المصنع، وذلك لتحديد أنسب وسائل التنقل؛ حتى تحافظ على أوقات العاملين والعمل.

الفترات (الزمن بالدقيقة)	التكرار (عدد العاملين)
0 –	6
20 –	39
40 –	31
60 –	14
80 –	6
100 –	4

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

2 الجدول التالى يبين زمن تسليم الطلبات بالثانية لأحد مطاعم الوجبات السريعة.

الفترات (الزمن بالثانية)	التكرار (عدد الوجبات)
75 –	11
120 –	24
165 –	10
210 –	3
255 –	2

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

③ الجدول التالى يوضح عدد المنازل ذات المساحات المختلفة (مقيسة بالمتر المربع).

الفـتـرات ($م^2$)	100 –	150 –	200 –	250 –	300 –	350 –
التكــرار	5	23	27	21	9	5

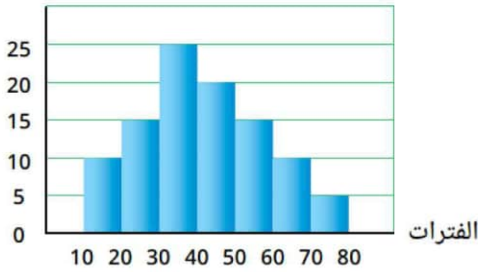
① كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

② أوجد عدد المنازل التى مساحتها أقل من 300 متر مربع.

③ أوجد عدد المنازل التى مساحتها 150 مترًا مربعًا أو أكثر.

④ أوجد النسبة المئوية للمنازل التى مساحتها 250 مترًا مربعًا أو أكثر.

④ من المدرج التكرارى المقابل كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.



⑤ الجدول المقابل يبين التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد لدرجات 100 طالب بالصف الثانى الإعدادى فى مادة الرياضيات.

① ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 25 درجة؟

② ما عدد الطلاب الذين حصلوا على 30 درجة أو أكثر؟

③ كون الجدول التكرارى ذى المجموعات.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 5	0
أقل من 10	10
أقل من 15	36
أقل من 20	61
أقل من 25	79
أقل من 30	89
أقل من 35	95
أقل من 40	100

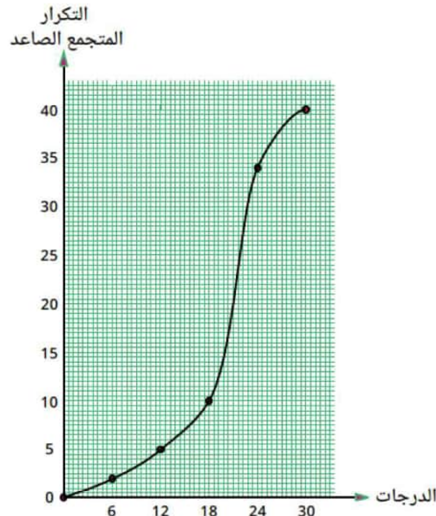
تم عمل استبيان لعدد 40 شخصًا اشتروا أجهزة لوحية (تابلت)
، لمعرفة مقاس شاشة أجهزتهم بالبوصة
يلخص الجدول المقابل نتائج هذا الاستبيان.

المقاس (بوصة)	التكـرار
7 –	5
8 –	6
9 –	9
10 –	16
11 –	3
12 –	1

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا، ثم أجب عما يلى :

1. كم عدد الأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية :
   من 7 إلى أقل من 8 بوصات؟
   أقل من 11 بوصة؟
   9 بوصات أو أكثر؟
2. ما النسبة المئوية للأجهزة اللوحية التى لها الأحجام التالية : من 10 إلى أقل من 11 بوصة؟ أقل من 9 بوصات؟

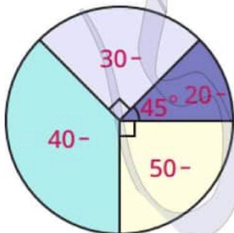
اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي مستعيناً بالشكل المقابل:



الشكل المقابل يمثل المنحنى المتجمع الصاعد لدرجات طلاب فصل مكون من 40 طالبًا فى أحد الامتحانات.

1. ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من 12 درجة؟
   (أ) 5 (ب) 10
   (جـ) 20 (د) 40
2. ما عدد الطلاب الذين حصلوا على 18 درجة أو أكثر؟
   (أ) 20 (ب) 30
   (جـ) 35 (د) 40
3. ما النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا على أقل من 6 درجات؟
   (أ) 5 % (ب) 10 %
   (جـ) 15 % (د) 20 %

أجب عن السؤال التالي:



يوضح مخطط القطاعات الدائرية المقابل عدد السائحين لمنطقة خان الخليلى فى أحد الأيام حسب أعمارهم بالسنوات (20 – , 30 – ,...). إذا كان العدد الكلى للسائحين 600 سائح، كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ومثله بيانيًا.

مقاييس النزعة المركزية للجدول التكراري ذي المجموعات

تذكر

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

فمثلا: الوسط الحسابي للقيم : 5 , 14 , 2 يساوي 7 = $\frac{5 + 14 + 2}{3}$

الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها

فمثلا: الوسيط للقيم : 5 , 14 , 2 يساوي 5

المنوال هو القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا بين مجموعة القيم

فمثلا: المنوال للقيم : 5 , 14 , 2 هو : لا يوجد

المنوال للقيم : 3 , 7 , 3 هو : 3

الوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي المجموعات

يمكن حسابه من الصيغة الرياضية: الوسط الحسابى $(\overline{X}) = \frac{\Sigma(f.X_m)}{\Sigma f}$

حيث Σf هو مجموع التكرارات

X_m هى مركز المجموعة

$\Sigma(f.X_m)$ هو مجموع حواصل ضرب مركز كل مجموعة X_m فى التكرار المناظر لها f

مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى لها}}{2}$

مثال

عند قياس سرعات السيارات المارة على أحد الطرق السريعة، وجدت إدارة المرور البيانات الآتية عند ملاحظة سرعات 100 سيارة فى أحد الأيام.

السرعة (كم/س)	التكرار
80 –	13
90 –	17
100 –	24
110 –	32
120 –	14

قدّر الوسط الحسابى لسرعات السيارات المارة فى هذا اليوم.

الحل

المجموعات (الفترات)	التكرار (f)	مراكز الفترات (X_m)	$f.X_m$
80 –	13	85	1105
90 –	17	95	1615
100 –	24	105	2520
110 –	32	115	3680
120 –	14	125	1750
المجموع	100		10670

$\overline{X} = \frac{\Sigma(f.X_m)}{\Sigma f} = \frac{10670}{100} = 106.7$

∴ الوسط الحسابى لسرعات السيارات = 106.7 كم / س

تمرين

يوضح الجدول التكرارى التالى أطوال عينة من النباتات فى مشتل.

الفترات (مم)	التكرار
300 –	3
320 –	18
340 –	47
360 –	32
380 –	14
400 –	6

قدِّر الوسط الحسابى لأطوال النباتات.

المجموعات (الفترات)	التكرار (f)	مراكز الفترات (X_m)	$f.X_m$
المجموع			

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(f.X_m)}{\Sigma f} = \qquad =$$

مثال

يوضح الجدول المقابل عدد نقاط أحد فرق الدورى الممتاز فى مباريات كرة السلة، فإذا كان متوسط نقاط الفريق 90 نقطة. أوجد قيمة k

عدد النقاط	التكرار
60 –	1
70 –	5
80 –	k
90 –	10
100 –	6

الحل

الفترات	التكرار (f)	مراكز الفترات (X_m)	$f.X_m$
60 –	1	65	65
70 –	5	75	375
80 –	k	85	85 k
90 –	10	95	950
100 –	6	105	630
المجموع	22 + k		2020 + 85 k

$$\because \overline{X} = \frac{\Sigma(f.X_m)}{\Sigma f} = \frac{2020 + 85k}{22 + k} = 90$$

$\therefore 90(22 + k) = 2020 + 85k$ $\qquad$ $\therefore 1980 + 90k = 2020 + 85k$

$\therefore 90k - 85k = 2020 - 1980$ $\qquad$ $\therefore 5k = 40$ $\qquad$ $\therefore k = 8$

تمرين

سُجلت أعداد المرضى المترددين على إحدى العيادات فى إحدى المستشفيات خلال عدد من الأيام فكانت كالآتى :

عدد المرضى	التكرار
10 –	16
20 –	15
30 –	m
40 –	10
50 –	3
60 –	2

إذا كان متوسط عدد المرضى خلال اليوم 30 مريضًا، أوجد قيمة m

الوسيط لتوزيع تكراري ذي المجموعات



من بيانات الجدول التكرارى التالى :

المجموعات	– 0	– 6	– 12	– 18	– 24
التكـرار	6	8	12	10	4

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

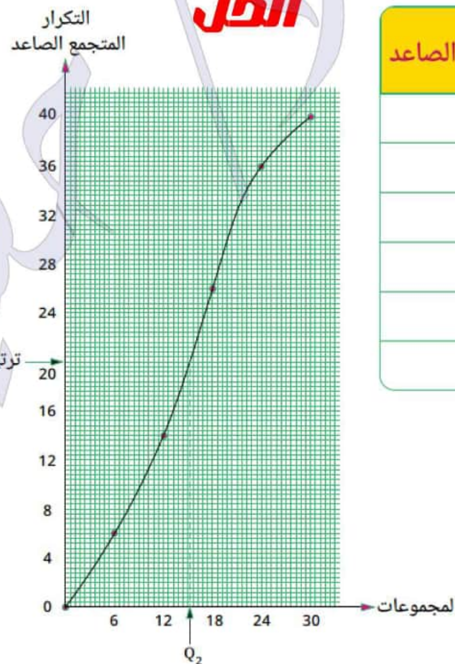
مثال

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

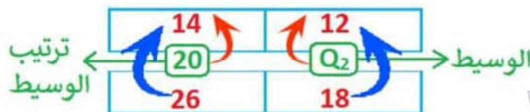
• ترتيب الوسيط $= \frac{40}{2} = 20$

• الوسيط $(Q_2) = 15$



بطريقة أخرى عن طريق الجدول يمكن تحديد قيمة الوسيط كالتالي

ترتيب الوسيط = 20



$\therefore \frac{20-14}{26-14} = \frac{Q_2-12}{18-12}$

$\therefore \frac{6}{12} = \frac{Q_2-12}{6}$

$\therefore Q_2 - 12 = \frac{6 \times 6}{12} = 3$

$\therefore Q_2 = 3 + 12 = 15$

تمرين

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات 60 طالبًا فى اختبار مادة الرياضيات.

الدرجات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -	35 -	المجموع
التكرار	2	4	14	20	k	5	1	60

أوجد قيمة k ، ثم ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ، ومنه قدِّر قيمة الوسيط.

المنوال لتوزيع تكراري ذي المجموعات

يمكنك تقدير المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات عن طريق رسم المدرج التكرارى وتحديد المجموعة الأكثر تكرارًا وتسمى المجموعة المنوالية ثم تحديد مسقط نقطة تقاطع $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ على المحور الأفقى وتكون هى القيمة المنوالية.

مثال

توضح مجموعة البيانات الآتية أوقات استخدام الهاتف المحمول (بالدقائق) لثلاثين طالبًا جامعيًا فى أحد الأيام.

الوقت (دقيقة)	120 –	150 –	180 –	210 –	240 –	270 –
عدد الطلاب	3	4	5	6	8	4

قدِّر المنوال لأوقات استخدام المحمول باستخدام المدرج التكرارى.

الحل

المنوال ≈ 250 دقيقة

تمرين

اختيرت ثمانون برتقالة عشوائيًا من قِبَل قسم مراقبة الجودة فى أحد مصانع العصير ، وتم وزن البرتقال، وكانت النتائج كما بالجدول التالى :

الوزن (جرام)	عدد البرتقال
75 –	4
100 –	8
125 –	16
150 –	32
175 –	14
200 –	6

قدِّر المنوال لوزن البرتقالة باستخدام المدرج التكرارى.

الواجب

أجب عن الأسئلة التالية:

① يبين الجدول التالى متوسط إنفاق الطالب اليومى داخل مدرسة لعدد خمسين طالبًا فى الصف الثانى الإعدادى.

الإنفاق (بالجنيه)	– 0	– 10	– 20	– 30	– 40	– 50
التكرار	7	12	15	9	5	2

قدِّر الوسط الحسابى للإنفاق اليومى.

② يُظهر الجدول التالى أعمار المعلمين المسجلين فى دورة تدريبية حول سلامة وأمان المنشآت التعليمية.

الأعمار (سنة)	– 26	– 30	– 34	– 38	– 42	– 46
التكرار	4	10	28	35	15	8

ارسم المدرج التكرارى ومنه قدر العمر المنوالى.

③ يوضح الجدول التالى كتل 40 شخصًا (بالكيلو جرام) لكى ينضموا إلى أحد برامج إنقاص الوزن.

الفترات	– 70	– 80	– 90	– 100	– 110	– 120	– 130
التكرار	2	5	9	12	7	3	2

قدِّر الوسيط بيانيًا.

④ يبين الجدول الآتى التوزيع التكرارى لدرجات 40 طالبًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	– 5	– 10	– 15	– 20	– 25	المجموع
التكرار	k	10	$3k$	8	$k+2$	40

أوجد قيمة k ، ثم قدِّر قيمة الوسيط.

⑤ يبين الجدول الآتى استهلاك الكهرباء شهريًا بوحدة كيلو وات ساعة لعدد 100 منزل.

الفترات (ك.و.س)	– 0	– 100	– 200	– 300	– 400	– 500	– 600
عدد المنازل	4	10	28	35	15	6	2

① قدِّر الوسط الحسابى للاستهلاك.
② قدِّر الوسيط.
③ قدِّر المنوال.
④ رتب قيم المقاييس التى حصلت عليها تصاعديًا.

اختر الأجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

① ما مركز المجموعة الثانيـة فى المجموعات : 5 – ، 15 – ، 25 – ، 35 – ؟

(أ) 5　(ب) 10　(جـ) 15　(د) 20

② إذا كان : $\Sigma f = 50$ ، $\Sigma f.X_m = 800$ ما الوسط الحسابى $\overline{X}$ ؟

(أ) 16　(ب) 160　(جـ) 750　(د) 850

③ إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 18 ومركزها هو 15.5 ، فما الحد الأدنى لهذه المجموعة؟

(أ) 12　(ب) 12.5　(جـ) 13　(د) 13.5

④ يوضح الجدول التكرارى الآتى درجات 150 طالبًا فى مادة الرياضيات :

الدرجات	4 –	12 –	20 –	28 –	36 –	44 –	52 –	المجموع
التكرار	15	3 k	4 k	32	25	22	14	150

① ما قيمة k ؟

(أ) 4　(ب) 5　(جـ) 6　(د) 7

② ما ترتيب الوسيط؟

(أ) 37.5　(ب) 75　(جـ) 112.5　(د) 150

③ ما قيمة الوسيط؟

(أ) 28　(ب) 32.5　(جـ) 34.5　(د) 36

⑤ من المـدرج التكرارى المقابل،

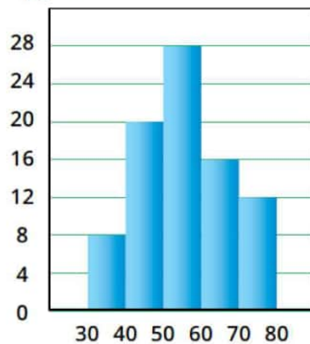
ما الفترة المنوالية؟

(أ) 30 –

(ب) 40 –

(جـ) 50 –

(د) 70 –



⑥ يبين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المقابل عدد ساعات العمل الأسبوعية لعدد 40 عاملًا فى أحد المصانع.

ما قيمة الوسيط؟

(أ) 28.75

(ب) 30.25

(جـ) 24.75

(د) 31.25

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 20	0
أقل من 24	2
أقل من 28	7
أقل من 32	23
أقل من 36	35
أقل من 40	38
أقل من 44	40

نموذج إختبار الكتاب المدرسي على المنهج

المجموعة الأولى

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) ما المعكوس الضربى للعدد $-\sqrt{2}$ فى أبسط صورة ؟

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) ما ناتج $\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $\sqrt[3]{2}$ (د) 2

3) إذا كان : $x^3 + y^3 = 20$, $x^2 - xy + y^2 = 4$ فما قيمة : $2x + 2y$ ؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

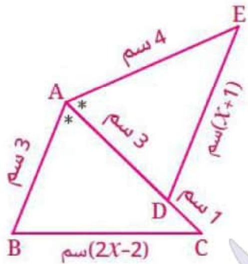
4) ما مجموعة حل المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ فى R ؟

(أ) $\{1 , 3\}$ (ب) $\{-1 , -3\}$ (جـ) $\{1 , -3\}$ (د) $\{-1 , 3\}$

5) إذا كان : $a + b = 2\sqrt{5}$, $c - d = \sqrt{5}$ فما قيمة المقدار $ac - ad + bc - bd$ ؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $3\sqrt{5}$ (جـ) 10 (د) 20

6) فى الشكل المقابل :



ما قيمة x ؟

(أ) 1 (ب) 2

(جـ) 3 (د) 4

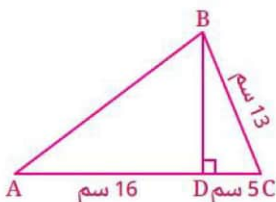
7) ما عدد أضلاع المضلع الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة °1980 ؟

(أ) 10 (ب) 11 (جـ) 12 (د) 13

8) إذا كانت بداية المجموعة هى 15 ومركزها 17.5 فما طول المجموعة ؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 20 (د) 25

9) فى الشكل المقابل :



ما طول $\overline{AB}$ ؟

(أ) 12 سم (ب) 25 سم

(جـ) 20 سم (د) 16 سم

المجموعة الثانية

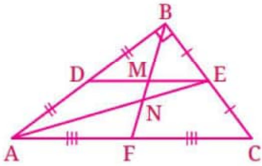
◄ **أجب عن الأسئلة الآتية :**

① إذا كانت $X =]-4 , 1]$, $Y = [-2 , 5[$ فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد ما يأتى :

① $X \cap Y$ ② $X \cup Y$ ③ $Y - X$

② اختصر المقدار $\frac{(\sqrt{3})^{2n+3}}{(\sqrt{2})^{1-n} \times (\sqrt{6})^{n-1}}$ لأبسط صورة، ثم أوجد قيمة الناتج عند $n = 0$

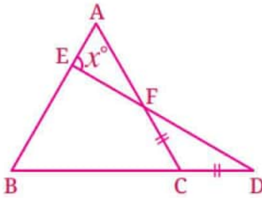
③ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان طول $\overline{DE} = 6$ سم

فأوجد مع البرهان طول $\overline{MN}$

④ **فى الشكل المقابل :**



ABC مثلث متساوى الأضلاع

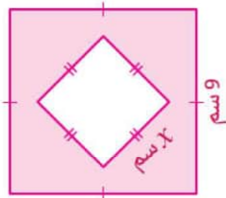
$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$ ، $CF = CD$

أوجد مع البرهان قيمة x

⑤ **حلل كلًا مما يأتى :**

① $4x^2 - 25$ ② $b^3 - 8$ ③ $4x^2 + 14x - 30$

⑥ عبر عن مساحة الجزء المظلل فى الشكل المقابل كحاصل ضرب عاملين.



⑦ أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	5 –	15 –	25 –	35 –	المجموع
التكرار	6	8	k	2	20